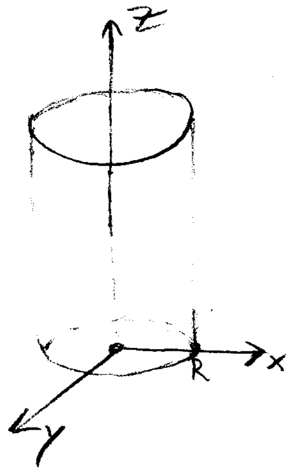


Zylinder-

Fläche?

Systematische Methode:

1. Schritt:

Parameterdarstellung (= Einbettung)

$$\vec{F}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq L \\ R = \text{const.} \end{matrix}$$

2. Schritt: Grammsche Matrix G berechnen

$$\nabla \vec{F}(\varphi, z) := \begin{pmatrix} \partial_\varphi F_1 & \partial_z F_1 \\ \partial_\varphi F_2 & \partial_z F_2 \\ \partial_\varphi F_3 & \partial_z F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi & 0 \\ -R\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3×2 Matrix

$$G = (\nabla \vec{F})^T (\nabla \vec{F}) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi & -R\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R\cos\varphi & 0 \\ -R\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

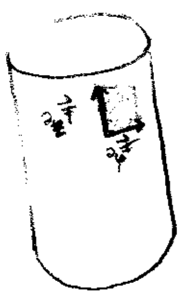
3. Schritt: über Grammsche Determinante integrieren:

$$g = \det G = R^2$$

Mantelfläche $A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz \sqrt{g} = 2\pi L \sqrt{R^2} = 2\pi L R$

Die Grammsche Matrix G wird aus den Vektoren $\partial_\varphi \vec{F}$ und $\partial_z \vec{F}$ berechnet, aus diesen setzt sich ja $D\vec{F}$ zusammen.

Diese Vektoren sind Tangentenvektoren an die Fläche:



Behauptung: $\sqrt{g}$ ist die Fläche zwischen $\partial_z \vec{F}$, $\partial_\varphi \vec{F}$

$\sqrt{g}\, d\varphi\, dz$ das infinitesimale Flächenelement

Berechne dazu G für zwei Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$:

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{a}|^2 & \vec{a}\circ\vec{b} \\ \vec{a}\circ\vec{b} & |\vec{b}|^2 \end{pmatrix}$$

$$g = \det G = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a}\circ\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})) = |a|^2 |b|^2 \sin^2(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))$$

$$\sqrt{g} = |a|\cdot|b|\cdot\sin(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})) = |\vec{a}\times\vec{b}| \hat{=} \text{Fläche des Parallelograms zwischen } \vec{a}, \vec{b}$$