

Blatt 8 – Hausaufgaben

(Abgabe: 25. Juni, 13:15)

1. Lorenkraft

- a)** Zeigen Sie, daß für verallgemeinerte Kräfte, die durch eine geschwindigkeitsabhängige Funktion $U(q_j, \dot{q}_j)$ als

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (1)$$

angegeben werden können, die Lagrange-Gleichungen die gewöhnliche Form haben:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

Dabei ist $L(q_j, \dot{q}_j) = T(\dot{q}_j) - U(q_j, \dot{q}_j)$. Die Funktion $U(q_j, \dot{q}_j)$ heist “verallgemeinertes Potential”.

- b)** Wir betrachten ein geladenes freies Teilchen (elektrische Ladung q), das sich in einem ort- und zeitabhängigen elektromagnetischen Feld (elektrisches Feld \mathbf{E} , magnetisches Feld \mathbf{B}) bewegt. Die Lagrange-Funktion des Teilchens hat die Form

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - q\phi + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}},$$

wobei $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$ das Skalar- und $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ das Vektor-Potential ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \end{aligned}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen (in Vektornotation) auf; zeigen Sie, daß das Ergebnis die Form

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

hat, wobei \mathbf{F} durch die Lorenkraft

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \right), \quad (2)$$

gegeben ist.

- c)* Schreiben Sie $L = T - U$ und berechnen Sie die verallgemeinerte Kraft mittels Gl. (1). Ist das Ergebnis konsistent mit Gl. (2)?

2. Kreissegment

A und B seien zwei Punkte mit den Koordinaten $A(-L/2, 0)$ und $B(L/2, 0)$ auf der (x, y) -Ebene. $y = f(x)$ sei eine Kurve der Länge l , die die Punkte A und B verbindet: $y(-L/2) = y(L/2) = 0$. Der Flächeninhalt der zwischen der Kurve $y(x)$ und der geraden Verbindungslinie AB eingeschlossen ist, kann als ein Funktional $S[y(x)]$ ausgedrückt werden.

- a)* Geben Sie das Funktional $S[y(x)]$ an.
- b)* Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für $S[y(x)]$ auf.
- c)** Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung und bestimmen Sie die Funktion $y(x)$, die den Flächeninhalt S für eine bestimmter Länge l maximiert.
- d)* Sie bekommen ein Kreissegment. Was ist der Radius des Kreissegments?

3. Noethersches Theorem

Wir betrachten homogene Massenverteilungen, die ein Gravitationsfeld erzeugen. Ein Massenpunkt bewege sich im dreidimensionalen Raum in diesem Gravitationsfeld. Berechnen Sie mit dem Noetherschen Theorem unter Angabe der Symmetrietransformationen explizit die jeweiligen Erhaltungsgrößen für diesen Massenpunkt. Sie müssen die (offensichtliche) Energieerhaltung dabei nicht jedesmal angeben.

- a)* Homogene Massenverteilung in der Halbebene $z = 0, y > 0$
- b)* Homogene Massenverteilung innerhalb eines Zylinders endlicher Länge mit Rotationsachse entlang der z -Achse
- c)* Homogene Massenverteilung auf einer Schraubenlinie mit Ganghöhe h , orientiert in z -Richtung.

4. Wellengleichung

Eine Saite wird an beiden Enden zwischen zwei Punkten $A(-L/2, 0)$ und $B(L/2, 0)$ festgehalten und durch eine konstante Kraft F gespannt. Wir betrachten transversale Schwingungen der Saite außerhalb des Gravitationsfeldes. Die Auslenkung an der Stelle x zur Zeit t wird $y(x, t)$ genannt. Die Saite hat eine Gleichgewichtslänge $l < L$ und eine lineare Massenbelegung τ .

a)* Zeigen Sie, daß die kinetische Energie

$$T = \frac{\tau}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \dot{y}^2 dx.$$

entspricht

b)** Leiten Sie die potentielle Energie für den Fall der kleinen Schwingungen ab.
Ergebnis: Sie bekommen

$$V = F \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx + \text{const.}$$

Hinweis: Beachten Sie, daß sich die Länge der Saite bei der Auslenkung um

$$\Delta L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} - L.$$

ändert. Betrachten Sie nur einen speziellen Fall der kleinen Schwingungen: wenn die Längenänderung ΔL klein ist im Vergleich mit $(L - l)$, dann ist die Spannung homogen über die Länge der Saite verteilt und man kann die potentielle Energie durch ΔL ausdrücken.

c)* In der Kontinuumsmechanik ist die Lagrange-Funktion ein Funktional von dem Koordinatenfeld $y(x, t)$ und wird deshalb nicht oft benutzt. Dann spricht man von einer Lagrangedichte \mathcal{L} , die für ein Koordinatenfeld $y(x, t)$ durch die Wirkung

$$S[y(x, t)] = \iint \mathcal{L}(y, y', \dot{y}, x, t) dx dt$$

definiert ist, wobei $y' = \partial y / \partial x$ und $\dot{y} = \partial y / \partial t$. Geben Sie die Lagrangedichte für den Fall kleiner Schwingungen der Saite an.

Hinweis: Sie müssen die potentielle Energie bis zur zweiten Ordnung von $y'(x, t)$ unter dem Integral entwickeln.

d)** Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die Lagrangedichte $\mathcal{L}(y, y', \dot{y}, x, t)$ ab.

Hinweis: Beachten Sie, daß die Wirkung $S[y(x, t)]$ durch eine Integration über die zweidimensionale "Zeitvariable" $\mathbf{t} = (x, t)$ entsteht. Wiederholen Sie die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen nach den Schritten in der Vorlesung oder in einem Buch, aber unter dem Umstand daß $t \rightarrow (x, t)$.

Ergebnis: Für den Fall mehrerer Felder $q = \{q_j\}$ und Zeitkoordinaten $t = \{t_i\}$ bekommt man (siehe z.B. T. Fließbach, "Mechanik", 3. Aufl. 1999, Seite 97)

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial t_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial q_j / \partial t_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0,$$

wobei in unserem Fall $q = (y)$ und $t = (x, t)$.

- e)* Stellen Sie für die in c) hergeleitete Lagrangedichte die Euler-Lagrange-Gleichung auf.

Ergebnis: Sie erhalten die sogenannte “Wellengleichung”

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \sqrt{F/\tau}$.

- f)* Prüfen Sie nach, daß $y(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$ mit zwei beliebigen zweifach differenzierbare Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ eine Lösung der Wellengleichung ist.

- g)*** Stellen Sie für $y(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$ eine Fourierreihe auf, wobei die Koeffizienten dürfen beliebig gelassen werden. Verwenden Sie die Randbedingungen $y(\pm L/2) = 0$ und $\dot{y}(\pm L/2) = 0$ um die Eigenmoden der Welle abzuleiten. Bestimmen Sie auch die Eigenfrequenzen.

Ergebnis: Sie bekommen symmetrische $y(x, t) = y(-x, t)$ und antisymmetrische $y(x, t) = -y(-x, t)$ Eigenmoden die “stehenden Wellen” genannt werden. Umordnen Sie die Fourierreihen so daß Sie bekommen Terme $\propto \cos(nkx) \sin(nckt + \phi_n)$ für die symmetrische stehende Wellen und Terme $\propto \sin(mkx) \sin(mckt + \theta_m)$ für die antisymmetrische stehende Wellen. Bestimmen Sie die erlaubten $k \in R$, $n \in N$, und $m \in N$ aus der Randbedingungen.

Blatt 8 – Einstiegsaufgaben

1'. Kreis

Bestimmen Sie die geschlossene Kurve die für eine bestimmte Kurvenlänge l die maximale Fläche entspricht.

2'. Noethersches Theorem

Wir betrachten homogene Massenverteilungen, die ein Gravitationsfeld erzeugen. Ein Massenpunkt bewege sich im dreidimensionalen Raum in diesem Gravitationsfeld. Berechnen Sie mit dem Noetherschen Theorem unter Angabe der Symmetrietransformationen explizit die jeweiligen Erhaltungsgrößen für diesen Massenpunkt. Sie müssen die (offensichtliche) Energieerhaltung dabei nicht jedesmal angeben.

- Homogene Massenverteilung in der Ebene $z = 0$
- Homogene Massenverteilung innerhalb eines Zylinders unendlicher Länge mit Rotationsachse entlang der z -Achse

- c) Homogene Massenverteilung innerhalb einer Kugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems