

Blatt 9 – Hausaufgaben

(Abgabe: 2. Juli, 13:15)

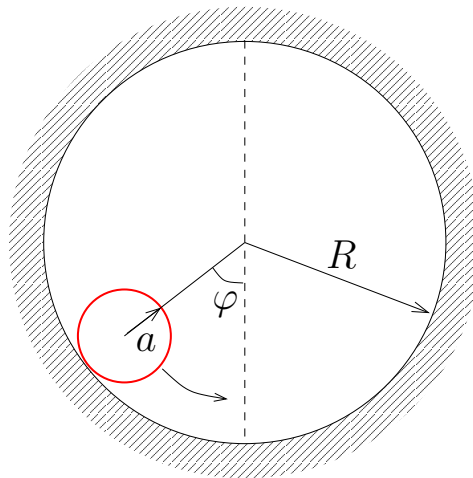
1. Trägheitstensor

Berechnen Sie für die folgenden homogenen Körper den Trägheitstensor und die Hauptträgheitsmomente im Schwerpunktsystem. Die Masse der Körper sei jeweils M . Elemente der Trägheitstensoren, die aus Symmetriegründen verschwinden, brauchen nicht explizit berechnet zu werden.

- a)* Dünner Stab der Länge l (die Dicke des Stabes sei vernachlässigbar).
- b)** Halbkugel mit Radius R .
- c)* Kreiszyylinder mit Radius R und Höhe h .
- d)** Kreiskegel mit Grundkreisradius R und Höhe h .

2.** Zylinder

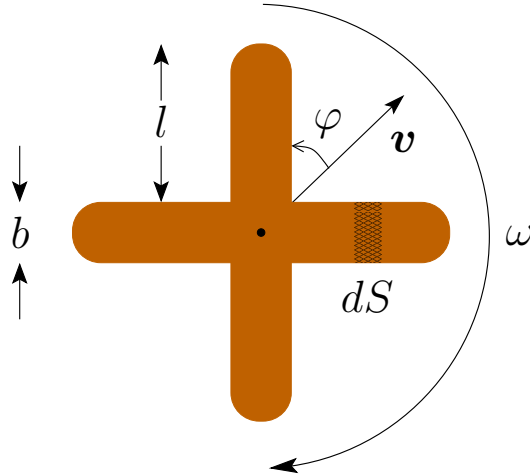
Ein Zylinder mit Radius a und Masse M rollt in einem Hohlzylinder mit Radius R ab. Bestimmen Sie die kinetische Energie des Zylinders als Funktion von $\dot{\varphi}$.



3. Bumerang

Gegeben sei ein vierblättriger Bumerang. Die einzelnen Blätter haben ein symmetrisches Tragflügelprofil, so daß ein Flächenelement dS die Auftriebskraft $dF = \lambda v_{\perp}^2 dS$ erfährt, falls die anströmende Luft die senkrecht auf der Flügellängsachse in der Bumerangebene liegende Komponente v_{\perp} hat. Jedes Blatt habe die Masse $m/4$ und werde als schmal ($b \ll l$) und dünn angesehen. Der Bumerang werde senkrecht zum Erdboden abgeworfen mit Schwerpunktgeschwindigkeit v und

Winkelgeschwindigkeit ω (d.h. \mathbf{v} und $\boldsymbol{\omega}$ bilden eine Ebene parallel zum Erdboden). Der Anfangswinkel, den ein Flügel mit der Anfangsgeschwindigkeit hat, sei φ . Man vernachlässige Schwerkraft und Reibung in dieser Aufgabe.



- a)* Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_3 bei Rotation wie im Bild um die Achse durch den Mittelpunkt des Bumerangs.
- b)** Berechnen Sie für jedes der vier Blätter separat die Auftriebskraft direkt nach dem Abwurf. Zeigen Sie, daß der Betrag der resultierenden Gesamtkraft sich zu

$$F = 2\lambda b l \left(v^2 + \frac{2}{3}\omega^2 l^2 \right)$$

ergibt.

Hinweis: Bei der Berechnung der Auftriebskräfte ist jeweils über die Beiträge infinitesimaler Flügelstücke der Länge dr ($= dS/b$) zu integrieren.

- c)** Berechnen Sie für jedes der vier Blätter separat das Drehmoment der Auftriebskraft bezüglich den Mittelpunkt des Bumerangs. Zeigen Sie, daß der Betrag des resultierenden Gesamtdrehmoments sich zu

$$M = \frac{4}{3}\lambda b v \omega l^3$$

ergibt.

- d)* Zeigen Sie außerdem, daß die Gesamtkraft senkrecht auf der Rotationsebene des Bumerangs steht und daß das Drehmoment in die (oder entgegen der) Flugrichtung des Bumerangs zeigt.

- e)** Mit den Ergebnissen aus a), c), und d), bestimmen Sie die Präzessionsgeschwindigkeit ω_p , mit der sich die Rotationsebene direkt nach dem Abwurf dreht.

Hinweis: Um die Präzessionsgeschwindigkeit zu finden, verwenden Sie die Formel (gültig für $\omega_p \ll \omega$)

$$\boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{L} = \mathbf{M},$$

wobei \mathbf{L} der Drehimpuls ist.

- f)* Der Bumerang bewegt sich nun mit bestimmten konstanten Beträgen von $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{v} und beschreibt einen Kreis in der horizontalen Ebene. Zeigen Sie, daß sich der Kreisradius zu

$$R = \frac{m}{4\lambda b l}$$

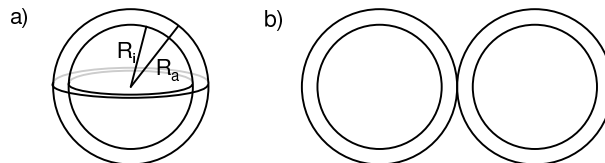
ergibt.

- g)** Bestimmen Sie v/ω für die Kreisbahn.

Blatt 9 – Einstiegsaufgaben

1'. Trägheitstensor

- a) Berechnen Sie den Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunkts für eine homogene Vollkugel mit Radius R und Masse M .
- b) Berechnen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus a) den Trägheitstensor einer Kugelschale (bezüglich des Schwerpunkts) mit äußerem Radius R_a , innerem Radius R_i und Gesamtmasse M (siehe Abb. (a) unten).
- c) Diese Kugelschale rollt in gerader Linie eine schiefe Ebene mit Steigungswinkel α herunter. Wie groß ist die Beschleunigung?
- d) Zwei dieser Kugelschalen sind wie in Abb. (b) skizziert zusammengesetzt. Berechnen Sie den Trägheitstensor dieses zusammengesetzten starren Körpers bezüglich des Schwerpunkts. Skizzieren Sie die Hauptachsen in diesem System und geben Sie die jeweiligen Hauptträgheitsmomente an.



2'. Rollender Kegel

Ein Kegel (Höhe h , Öffnungswinkel 2α , Massendichte ρ) rollt ohne Schlupf auf einer horizontalen Ebene ab, so daß er nach einer Zeit T wieder am Anfangspunkt ist. Drücken Sie die kinetische Energie im Laborsystem durch diese Parameter aus.