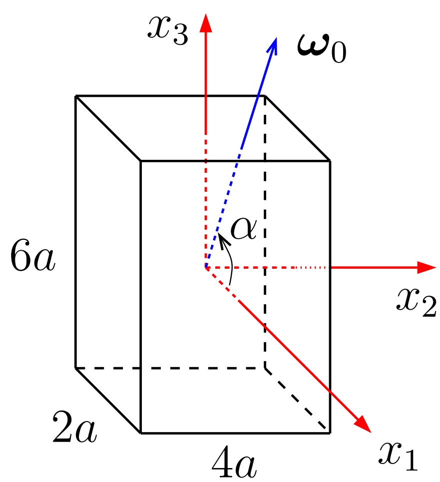
Prof. Dr. Jan von Delft
Theresienstr. 37, Zi. 420
Dr. Vitaly N. Golovach
vitaly.golovach@physik.lmu.de

Blatt 10 – Hausaufgaben

(Abgabe: 9. Juli, 13:15)

1. Eulersche Gleichungen

Betrachten Sie einen Quader dessen körperfestes Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) so gewählt ist, dass Ursprung und Schwerpunkt des Quaders zusammenfallen und die Koordinatenachsen parallel zu den Quaderachsen verlaufen. Die Kantenlängen des Quaders seien $2a$ in x_1-Richtung, $4a$ in x_2-Richtung und $6a$ in x_3-Richtung. Die Hauptträgheitsmomente werden im Folgenden mit I_1, I_2, und I_3 bezeichnet (I_i ist Trägheitsmoment zur Achse x_i). Auf den Körper sollen keine Drehmomente wirken. Zum Zeitpunkt $t = 0$ drehe sich der Quader mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_0 um eine Achse, die in der (x_1, x_3)-Ebene liegt, und die mit der x_1-Achse einen Winkel α mit $\cos\alpha = 5/8$ einschließt. Für diesen Fall kann man die Bewegung der Drehachse im Körper explizit bestimmen. Gehen Sie dazu in den folgenden Schritten vor:



a)* Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente I_1, I_2, und I_3.
<u>Ergebnis:</u>

$$I_1 = \frac{13}{3}ma^2, \quad I_2 = \frac{10}{3}ma^2, \quad I_3 = \frac{5}{3}ma^2.$$

b)* Stellen Sie die (drei) Eulerschen Gleichungen auf.

c)** Zeigen Sie durch Zusammenfassen der zweiten und dritten Gleichung (für $\dot{\omega}_2$ und $\dot{\omega}_3$), dass $3\omega_2^2 + 4\omega_3^2 = const$, also dass die Projektion der Drehachse auf die (x_2, x_3)-Ebene eine Ellipse beschreibt. Unter Verwendung der Anfangsbedingung können Sie deshalb schliessen, dass man mit einem Parameter ϕ die Bewegung von ω_2 und ω_3 folgendermaßen beschreiben kann:

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{13}}{4}\omega_0 \sin\phi, \quad \omega_3 = \frac{\sqrt{39}}{8}\omega_0 \cos\phi.$$

d)* Zeigen Sie mit den Eulerschen Gleichungen, dass dann gilt:

$$\omega_1 = -\frac{5}{2\sqrt{3}}\dot{\phi}.$$

e)** Schließen Sie aus der bislang noch nicht verwendeten 1. Eulerschen Gleichung und den Anfangsbedingungen, dass ϕ die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\dot{\phi} = -\frac{\sqrt{3}}{4}\omega_0 \cos\phi.$$

f)** Lösen Sie diese Differentialgleichung und geben Sie damit die Lösungen für $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, und $\omega_3(t)$ an.

2. Flummy

Ein Flummy ist ein hochelstischer Ball, bei dem die kinetische Energie bei einem Stoß relativ gut erhalten bleibt. Zugleich ist die Haftreibung sehr groß, so daß bei einem Kontakt kein Gleiten auftitt. Die Schwerkraft werde bei dieser Aufgabe vernachlässigt.

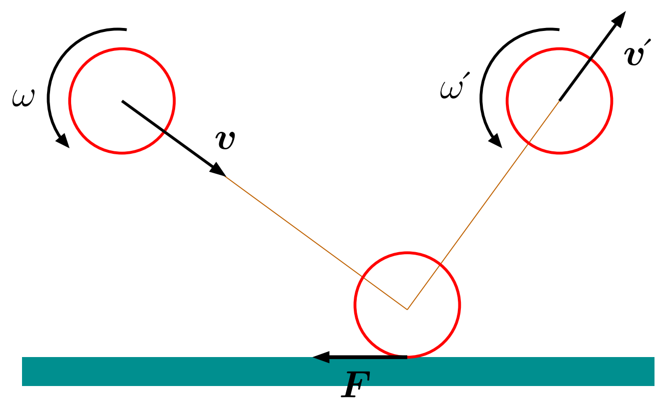
a)* Wie lautet das Trägheitsmoment I eines Flummys mit der Masse m und dem Radius a, wenn die Dichte konstant ist?

b)** Ein Flummy mit der Winkelgeschwindigkeit ω und der horizontalen Geschwindigkeitskomponente v_x wird auf den Boden geworfen und besitzt danach die Winkelgeschwindigkeit ω' und die horizontale Geschwindigkeitskomponente v'_x.

Machen Sie sich klar, dass die Reibungskraft beim (kurzzeitigen) Aufprall die folgenden Veränderungen des horizontalen Impulses und des Drehimpulses bewirkt:

$$m(v_x - v'_x) = \int F dt, \tag{1}$$

$$I(\omega - \omega') = \int F a dt. \tag{2}$$



Wohin zeigt das Drehmoment der Reibungskraft? Da außerdem die vertikale Geschwindigkeit beim kurzzeitigen Aufprall umgekehrt wird, bleiben die Summe aus Rotationsenergie und horizontale Energie erhalten:

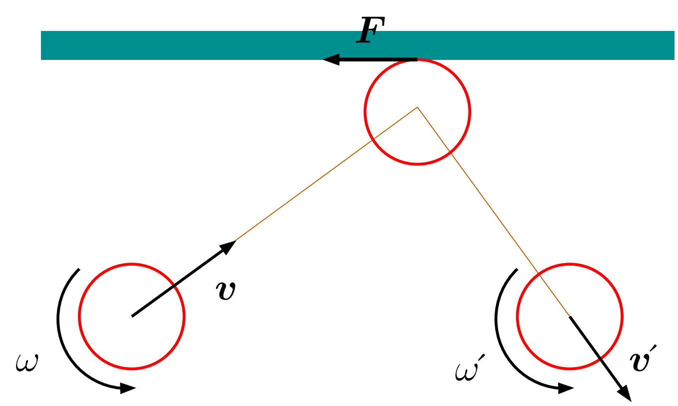
$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m{v'_x}^2 + \frac{1}{2}I\omega'^2. \tag{3}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von (1)-(3) und Aufgabteil a), dass die Geschwindigkeiten $(v_x, \omega a)$ durch eine dimensionslose Matrix M_B auf die Geschwindigkeiten $(v'_x, \omega' a)$ abgebildet werden

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ \omega' a \end{pmatrix} = M_B \begin{pmatrix} v_x \\ \omega a \end{pmatrix} \tag{4}$$

und bestimmen Sie M_B.

c)** Untersuchen Sie dieselbe Situation, wenn der Flummy von unten gegen eine Tischplatte geworfen wird.

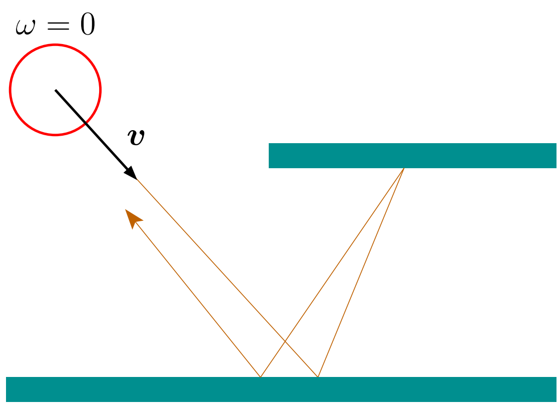


Zeigen Sie, daß es hier einen zu (4) analogen Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ \omega' a \end{pmatrix} = M_T \begin{pmatrix} v_x \\ \omega a \end{pmatrix} \tag{5}$$

gibt und bestimmen Sie M_T.

d)** Ein Flummy-Ball wird ohne Anfangsrotation auf den Boden geworfen und springt dann unter einen Tisch.



Berechnen Sie, mit welcher Endgeschwindigkeit und Endwinkelgeschwindigkeit er zurückkehrt.

Blatt 10 – Einstiegsaufgaben

1′. Schwerer symmetrischer Kreisel

Wir betrachten einen schweren symmetrischen Kreisel ($I_1 = I_2 = I$) im homogenen Schwerefeld mit dem Unterstützungspunkt auf der Figurenachse. Die Lagrangefunktion kann durch die Euler-Winkel (ϕ, ψ, θ) ausgedrückt werden und hat die folgende Form:

$$L = \frac{1}{2} I \, (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \, \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 \, (\dot{\psi} + \dot{\phi} \, \cos \theta)^2 - g \, M \, s \, \cos \theta$$

Dabei ist M die Gesamtmasse des Kreisels und s der Abstand zwischen Unterstützungspunkt und Schwerpunkt. Beachten Sie, dass die Trägheitsmomente I und I_3 bezüglich eines Hauptachsensystems durch den Unterstützungspunkt zu berechnen sind.

a) Geben Sie drei Erhaltungsgrößen an. Schreiben Sie damit die Bewegungsgleichung für $\theta(t)$ als eine Gleichung mit folgender Struktur

$$\frac{1}{2} \, \dot{u}^2 + V_{\text{eff}}(u) = 0$$

für $u(t) \overset{\text{def}}{=} \cos\theta(t)$ um. Was ist das effektive Potential ausgedrückt durch die Erhaltungsgrößen?

b) Verwenden Sie a), um eine formale Lösung der Bewegungsgleichung für $\theta(t)$ anzugeben. Skizzieren Sie das effektive Potential für Beispielparameter Ihrer Wahl und diskutieren Sie damit das qualitative Verhalten der Nutationsbewegung.

c) Ein aufrecht stehender ($\theta = 0$) symmetrischer Kreisel ist stabil, wenn eine bestimmte kritische Winkelgeschwindigkeit $\omega_3^{(\text{cr})}$ überschritten wird. Berechnen Sie $\omega_3^{(\text{cr})}$.
Bemerkung: Man spricht hier von einem "schlafenden Kreisel". Wird der Kreisel zunächst in rasche Rotation $\omega_3 > \omega_3^{(\text{cr})}$ versetzt, ist die aufrechte Lage stabil. Wenn die Winkelgeschwindigkeit aufgrund von Reibung unterhalb diese kritischen Schwelle abgefallen ist, beginnen torkelhafte Bewegungen (der Kreisel "wacht auf").