Übungen zur T1: Klassische Mechanik
Prof. Dr. Jan von Delft — Dr. Vitaly N. Golovach
Theresienstr. 37, Zi. 420 — vitaly.golovach@physik.lmu.de

# Blatt 11 – Hausaufgaben

**(Abgabe: 16. Juli, 13:15)**

## 1. Hamiltonfunktion

Wir betrachten einen schweren symmetrischen Kreisel (siehe auch Einstiegsaufgabe 1.′ des 10. Blatts) ($I_1 = I_2 = I$) im homogenen Schwerefeld mit dem Unterstützungspunkt auf der Figurenachse. Die Lagrangefunktion kann durch die Euler-Winkel $(\phi, \psi, \theta)$ ausgedrückt werden und hat die folgende Form:

$$L(\theta, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} I(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2} I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - gMs\cos\theta$$

Dabei ist $M$ die Gesamtmasse des Kreisels und $s$ der Abstand zwischen Unterstützungspunkt und Schwerpunkt. In dieser Aufgabe berechnen wir die Hamiltonfunktion des schweres symmetrisches Kreisels.

a)* Berechnen Sie zuerst die kanonischen Impulse, die zu den generalisierten Koordinaten $\phi$, $\psi$, und $\theta$ konjugiert sind.

b)* Mit den Ergebnissen von a), berechnen Sie die Energie,

$$h(q, \dot{q}) = \sum_j \dot{q}_j p_j(q, \dot{q}) - L(q, \dot{q}),$$

wobei $q_j$ und $p_j$ die generalisierten Koordinaten und kanonischen Impulse sind.

c)** Prüfen Sie ob das Gleichungssystem von a)

$$p_j = p_j(q, \dot{q}), \quad \text{mit } q = (\phi, \psi, \theta),$$

invertierbar ist. Ein lineares Gleichungssystem ist lösbar, wenn

$$\det M \neq 0, \quad \text{wobei } M_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Ist der schwere symmetrische Kreisel ein kanonisches System?

d)** Lösen Sie das Gleichungssystem bezüglich der Geschwindigkeiten $\dot{q}_j$ und finden Sie die Hamiltonfunktion des Kreisels,

$$\begin{aligned} H(q,p) &= h\left(q, \dot{q}(q,p)\right) \\ &= \sum_j \dot{q}_j(q,p) p_j - L\left(q, \dot{q}(q,p)\right). \end{aligned} \tag{1}$$

**2. Poisson-Klammer**

a) Beweisen Sie folgende Regeln für das Rechnen mit Poisson-Klammern:

$$[*]\quad \begin{aligned} \{U\,V, W\} &= \{U, W\}\,V + U\,\{V, W\}, \\ \{W, U\,V\} &= \{W, U\}\,V + U\,\{W, V\}, \end{aligned}$$

$$[**]\quad \{U, \{V, W\}\} + \{V, \{W, U\}\} + \{W, \{U, V\}\} = 0. \qquad \text{(Jacobi-Identität)}$$

Dabei sind $U, V, W$ beliebige physikalische Größen.

b)** Zeigen Sie, daß diese Rechenregeln auch gelten, wenn die Poisson-Klammer $\{.,.\}$ durch den Kommutator $[.,.]$ zweier quadratischer Matrizen ersetzt wird. Der Kommutator ist dabei definiert durch $[A, B] \stackrel{\text{def}}{=} A\,B - B\,A$, wobei $A\,B$ das übliche Matrixprodukt der quadratischen Matrizen $A$ und $B$ ist.

c)** Zeigen Sie, daß die Poisson-Klammer zweier Erhaltungsgrößen selbst wieder eine Erhaltungsgröße ist. Betrachten Sie den allgemeiner Fall, wenn die Erhaltungsgrößen auch explizit zeitabhängig sind.

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie dabei die Jacobi-Identität.

<u>Bemerkung:</u> Aufgabe c) bedeutet, daß die Erhaltungsgrößen eine abgeschlossene Algebra bilden. Eine äquivalente Beobachtung spielt eine große Rolle in der Quantenmechanik.

**3. Drehimpuls**

Wir betrachten ein System von $N$ Teilchen, beschrieben durch die folgende Hamiltonfunktion:

$$H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = \sum_j \frac{\boldsymbol{p}_j^2}{2m_j} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v\left(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|\right) \equiv T(\boldsymbol{p}) + V(\boldsymbol{r}),$$

wobei $v(r)$ eine beliebige Funktion, $\boldsymbol{r} = \{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N\}$ und $\boldsymbol{p} = \{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_N\}$ ist. Der Gesamptdrehimpuls ist definiert durch

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = \sum_j \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{p}_j.$$

a)** Berechnen Sie die Poisson-Klammern $\{L_\alpha, T\}$ und $\{L_\alpha, V\}$, und zeigen Sie mit Hilfe des Liouvilleschen Satzes für $\boldsymbol{L}$, daß $\boldsymbol{L}$ eine Erhaltungsgröße ist. <u>Hinweis:</u> Das Ergebnis für $\{L_\alpha, V\}$ verschwindet erst, nachdem die Summe $\sum_{i \neq j}$ ausgeführt worden ist, d.h. $\{L_{j\alpha}, V\} \neq 0$.

b)** Beweisen Sie:

$$\{L_\alpha, L_\beta\} = \sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, L_\gamma \ .$$

Bemerkung: Dies bedeutet, daß der Drehimpuls eine Darstellung der SO(3)-Algebra ist.

# Blatt 11 – Einstiegsaufgaben

**1′. Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld**

Im Blatt 8 hatten wir die nichtrelativistische Lagrangefunktion für ein geladenes Teilchen (Ladung $q$) im elektromagnetischen Feld kennengelernt:

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - q\phi + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$$

Dabei ist $\phi = \phi(\boldsymbol{r}, t)$ das skalare Potential und $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ das Vektorpotential.

a) Berechnen Sie die Hamiltonfunktion. Wie unterscheiden sich kinetischer Impuls und kanonischer Impuls?

b) Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie, daß das Ergebnis äquivalent zu den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen ist.