Übungen zur T1: Klassische Mechanik
Prof. Dr. Jan von Delft — Dr. Vitaly N. Golovach
Theresienstr. 37, Zi. 420 — vitaly.golovach@physik.lmu.de

Blatt 12 – Hausaufgaben

(wird nicht korrigiert, aber klausurrelevant!!!)

1. Kanonische Transformationen

a)** Zeigen Sie, dass eine zeitunabhängige Variablentransformation $Q_i = Q_i(\vec{q}, \vec{p})$, $P_i = P_i(\vec{q}, \vec{p})$ $(i = 1 \dots f)$ kanonisch ist, vorausgesetzt, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}, \qquad \{Q_i, Q_j\}_{q,p} = \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0 \tag{1}$$

Dabei bedeutet die Notation $\{.,.\}_{q,p}$, dass die Poisson-Klammer bezüglich der Variablen q und p zu berechnen ist.

b)*** Die Aussage aus a) gilt auch umgekehrt: Eine zeitunabhängige kanonische Transformation erfüllt die Bedingungen (1). Beweisen Sie diese Aussage für den Fall, dass die Poisson-Klammern $\{Q_i, P_j\}_{q,p}$, $\{Q_i, Q_j\}_{q,p}$, $\{P_i, P_j\}_{q,p}$ konstanten sind und der Vektor $(\partial H/\partial \vec{Q}, \partial H/\partial \vec{P})$ eine komplette Basis, mit $\vec{Q}$ und $\vec{P}$ als Veränderliche, bildet.

c)* Berechnen Sie die Poisson-Klammern $\{Q_i, P_j\}_{q,p}$, $\{Q_i, Q_j\}_{q,p}$ und $\{P_i, P_j\}_{q,p}$ für die folgenden Transformationen. Entscheiden Sie, welche der Transformationen kanonisch sind.

$$\begin{array}{rll}
\text{I)} & Q = \arctan(q/p), & P = \dfrac{q^2 + p^2}{2}, \\
\text{II)} & Q = \ln \dfrac{\sin p}{q}, & P = q \cot p, \\
\text{III)} & Q_i = p_i, & P_i = -q_i, \\
\text{IV)} & Q_i = p_i, & P_i = q_i,
\end{array}$$

2. Hamilton-Gleichungen

Gegeben sei ein System mit der folgenden Hamiltonfunktion:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4 \right). \tag{2}$$

a)* Stellen Sie die Hamilton-Gleichungen für das System auf.

b)* Stellen Sie die Bewegungsgleichung für q auf, indem Sie den Impuls p und seine Zeitableitung $\dot{p}$ aus den Hamilton-Gleichungen eliminieren.
Hinweis: Man leitet die erste Hamilton-Gleichung ($\dot{q} = \partial H/\partial p$) nach der Zeit ab und verwendet nochmals die beiden Hamilton-Gleichungen, um p und $\dot{p}$ aus der abgeleiteten Gleichung zu eliminieren.

c)** Finden Sie eine kanonische Transformation

$$\begin{aligned} Q &= Q(q,p), \\ P &= P(q,p), \end{aligned}$$

die die Hamiltonfunktion aus Gl. (2) zu der eines harmonischen Oszillators

$$\tilde{H}(Q,P) = \frac{1}{2}\left(Q^2 + P^2\right)$$

reduziert.

d)* Geben Sie die allgemeine Lölsung für $P(t)$ und $Q(t)$ an und zeigen Sie, mittels Rücktransformation, dass diese die Bewegungsgleichung aus a) erfüllt.

3. Harmonischer Oszillator
Gegeben sei ein harmonischer Oszillator mit der Hamiltonfunktion:

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2.$$

a)* Zeigen Sie, dass die Variablentransformation:

$$Q = p + iaq, \qquad P = \frac{p - iaq}{2ia}$$

kanonisch ist und bestimmen Sie eine erzeugende Funktion.

b)** Verwenden Sie die kanonische Transformation in a) (wählen Sie a, so dass die Ausdrücke vereinfacht werden) um das Problem des harmonisches Oszillators zu lösen.

4. Hamilton-Jacobi-Theorie
Betrachten Sie eine kanonische Transformation zwischen den Variablen q, p und Q, P. Es gilt dann

$$p\dot{q} - H(q,p,t) = P\dot{Q} - \tilde{H}(Q,P,t) + \frac{dF}{dt}, \tag{3}$$

wobei F eine Funktion von den vier Variablen q, p, Q, P und der Zeit t sein kann. Allerdings sind nur zwei der vier Variablen unabhängig. Wir wollen nun p und Q als diese unababhängigen Variablen wählen und schreiben außerdem F in der Form

$$F(q,P,t) = S(q,P,t) - Q(q,P,t)P$$

mit einer weiteren Funktion S.

a)* Verwenden Sie die Kettenregel um zu zeigen, dass mit

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}, \qquad p = \frac{\partial S}{\partial q}, \qquad Q = \frac{\partial S}{\partial P} \tag{4}$$

Gleichung (3) erfüllt ist [und somit (4) eine mögliche Wahl der neuen Variablen P und Q sowie der neuen Hamilton-Funktion $\tilde{H}$ festlegt].

b)* In der Hamilton-Jacobi-Theorie will man S so wählen, dass $\tilde{H}$ identisch verschwindet. Diese Forderung führt auf die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\tilde{H}(Q, P, t) = H\left(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

die eine Bedingung für S darstellt. Was bedeutet $\tilde{H} = 0$ für $\dot{Q}$ und $\dot{P}$ und was demnach für Q und P?

c)* Man betrachte nun ein System mit nicht explizit zeitabhängiger Hamilton-Funktion:

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + V(q).$$

Schreiben Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung (5) für dieses System hin. Wählen Sie nun den Separations-Ansatz

$$S(q, P, t) = A(q, P) - Pt$$

und scheiben Sie damit die Hamilton-Jacobi-Gleichung (5) in eine Differentialgleichung für A um.

d)* Was ist die physikalische Bedeutung von P?

e)* Was ist formal die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für A?

f)* Leiten Sie mit (4) und Ihrem Resultat aus e) einen Ausdruck für Q her.

g)** Finden Sie mit Hilfe des Resultats aus e) die allgemeine Lösung $q(t)$ für ein freies Teilchen mit $V = 0$ und für eines im linearen Potential $V(q) = aq$. Beachten Sie dabei, was Sie in Teil b) über Q herausgefunden hatten. Eliminieren Sie in Ihren Lösungen überflüssige Konstanten. Führen Sie gegebenfalls neue Konstanten ein, die Ihre Ergebnisse besser parametrisieren.

Blatt 12 – Einstiegsaufgaben

1′. Störungstheorie mit kanonischen Transformationen
Gegeben sei ein harmonischer Oszillator ($m = \omega = 1$) mit einem anharmonischen Term:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 + \frac{g}{4}q^4.$$

Der anharmonische Term wird als kleine Störung angenommen, d.h. $0 < g \ll 1$. Terme höherer Ordnung $\mathcal{O}\left(g^2\right)$ können konsequent vernachlässigt werden. Mit der Erzeugenden

$$F_2\left(q, P\right) = qP + g\,\left(c_1 P q^3 + c_2 P^3 q\right)$$
$$\text{mit } \tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t},\ p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \text{ und } Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$$

wird eine kanonische Transformation durchgeführt. c_1 und c_2 sind vorerst zwei beliebige Konstanten.

a) Bestimmen Sie $q\left(Q, P\right)$ und $p\left(Q, P\right)$. Geben Sie damit die Hamilton-Funktion $\tilde{H}$ in den neuen Variablen Q, P an. Konsistenterweise vernachlässigen Sie dabei immer Terme $\mathcal{O}\left(g^2\right)$.

b) Die neue Hamilton-Funktion soll die Form

$$\tilde{H} = H_0 + g\alpha H_0^2 + O(g^2) \quad \text{mit} \quad H_0 \equiv P^2/2 + Q^2/2 \tag{6}$$

mit einer geeigneten Konstanten α annehmen. Verwenden Sie diesen Ansatz, um c_1, c_2 und α eindeutig zu bestimmen.

c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für Q und P aus der Hamilton-Funktion in Gl. (6).

d) Die Hamilton-Funktion in Gl. (6) hat $H_0 \equiv E_0$ als Erhaltungsgröße. Beweisen Sie dies. Verwenden Sie diese Erhaltungsgröße zum Lösen der Bewegungsgleichungen für Q und P. Interpretieren Sie kurz das Ergebnis.