T1: Klassische Mechanik, SoSe2007
Prof. Dr. Jan von Delft
Theresienstr. 37, Zi. 420

Dr. Vitaly N. Golovach
vitaly.golovach@physik.lmu.de

Probeklausur zur Vorlesung T1: Theoretische Mechanik, SoSe 2007
30. Mai 2007

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte

Schreiben Sie bitte auf *jedes* Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen
Erlaubte Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes DIN A4-Blatt (2 Seiten), Bronstein

Name:
Gruppe:
Matrikel-Nummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte						
Korrektur						

1. Vektorkalkulus (5 Punkte)

(a) (1 Punkt) Es sei $\phi(x, y, z) = xy^2$ ein skalares Feld. Bestimmen Sie durch explizites Berechnen das Vektorfeld $\vec{A} = \vec{\nabla}\phi$.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie durch explizites Berechnen das Vektorfeld $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie mittels des Levi-Civita-Tensors, dass für ein beliebiges (zwei mal stetig differenzierbares) skalares Feld $\tilde{\phi}$ folgende Identität gilt: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\tilde{\phi} = 0$. [Hinweis: hierfür werden lediglich die definierenden (d.h. keine komplizierteren) Eigenschaften des Levi-Civita-Tensors benötigt.]

2. Erhaltungssätze (5 Punkte)
Zwei Punktteilchen, mit Massen m_1 und m_2, sind über eine Feder gekoppelt, sodass ihre potenzielle Energie durch

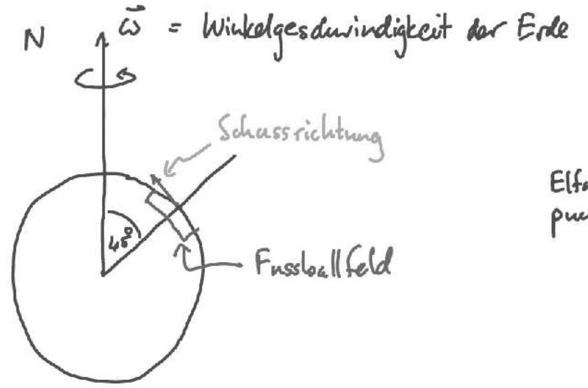
$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{k}{2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = \frac{k}{2}\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right]$$

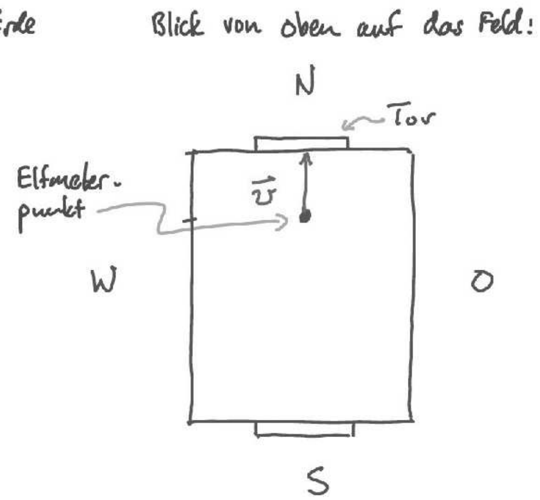
gegeben ist. Es liegen keine externen Kräfte vor.

(a) (1 Punkt) Finden Sie mittels den Newtonschen Bewegungsgleichungen $\dot{\vec{p}}_1$ und $\dot{\vec{p}}_2$ als Funktionen von $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie unter Benutzung des Ergebnisses von (a) explizit, dass der Gesamtimpuls des Systems erhalten ist.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie unter Benutzung des Ergebnisses von (a) explizit, dass der Gesamtdrehimpuls des Systems bezüglich des Ursprungs erhalten ist.

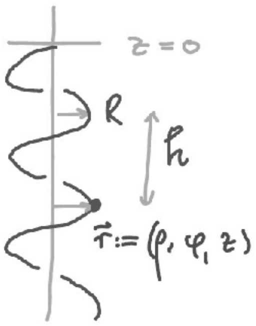




3. Coriolis-Kraft beim Elfmeterschuss (4 Punkte)
Auf einem Fussballfeld mit nord-südlicher Ausrichtung am 45.ten Breitengrad der Nordhalbkugel werde ein Fussball vom Elfmeterpunkt mit einer Geschwindigkeit von 50 m/s flach und direkt in Richtung der Mitte des nördlichen Tores (d.h. genau in nördliche Richtung) getreten. Er wird jedoch durch die Coriolis-Kraft geringfügig abgelenkt.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie mittels einer Skizze, welche Richtung die Ablenkung hat.

(b) (2 Punkte) Wie gross ist die Ablenkung bei der Überquerung der Torlinie? Ein Abschätzung der Größenordnung genügt, d.h. es reicht, die Antwort bis auf einen Faktor 10 genau anzugeben, in der Form: “Auslenkung $\simeq 10^{-x}$m”, bei Angabe von x.



4. Schraubenbewegung (8 Punkte)
Wir betrachten einen Massenpunkt im Schwerefeld, der sich auf einer Schraube mit Radius R und Ganghöhe h bewegen kann. Die Ganghöhe ist dabei definiert als Abstand zweier Windungen. Die Schraubenachse sei parallel zur Erdanziehungskraft, und diese wirke in die negative z-Richtung. Im Folgenden sei der Ortsvektor des Massenpunkts durch die Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) ausgedrückt, d.h. er habe die Form $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$.

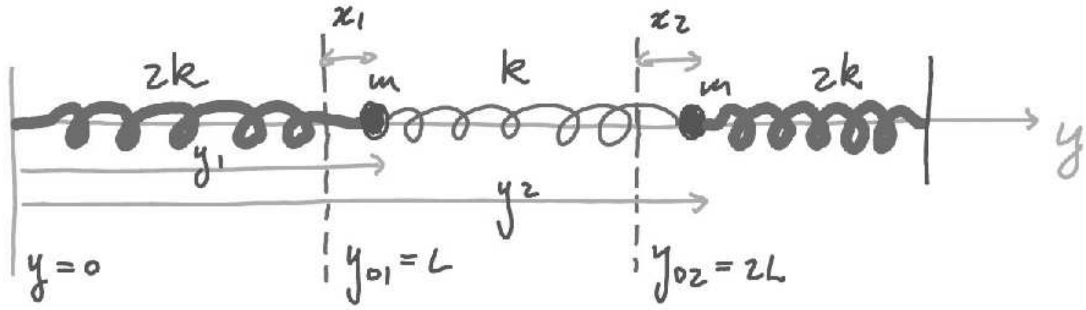
(a) (2 Punkte) Geben Sie die kinetische Energie des Teilchens allgemein in sowohl cartesischen Koordinaten, $T = T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, als auch in Zylinderkoordinaten $T = T(\rho, \phi, z; \dot{\rho}, \dot{\phi}, \dot{z})$ an.

(b) (2 Punkte) Die Bewegung des Massenpunkts unterliegt zwei Zwangsbedingungen. Geben Sie diese in Zylinderkoordinaten an. [Hinweis: z ist proportional zu ϕ.] Wählen Sie nun z als verallgemeinerte Koordinate und nutzen Sie die Zwangsbedingungen, um die beiden anderen Koordinaten $\rho = \rho(z)$ und $\phi = \phi(z)$ als Funktionen von z zu schreiben.

(c) (2 Punkte) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L = L(z, \dot{z})$ an und stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 2.ter Art für $z(t)$ auf.

(d) (2 Punkte) Lösen Sie die Gleichung (c) für die Anfangsbedingungen $\vec{v}(0) = 0$, $\phi(0) = 0$ und $z(0) = 0$, und bestimmen Sie so die Koordinaten $z(t)$, $\phi(t)$ und $\rho(t)$ als Funktionen der Zeit.

Hinweis: ein Ergebnis lautet: $z(t) = \dfrac{-1}{1 + (2\pi R/h)^2} \dfrac{gt^2}{2}$.



5. Eigenschwingungen (8 Punkte)
Auf einer geraden Schiene (Gesamtlänge $3L$) in y-Richtung bewegen sich reibungsfrei zwei Massenpunkte mit gleicher Masse m und Ortskoordinaten $y_1(t)$ bzw. $y_2(t)$, mit $y_1 < y_2$. Drei Federn, alle mit Gleichgewichtslänge L aber mit unterschiedlichen Federkonstanten von $2k$, k bzw. $2k$, verknüpfen einen Aufhängepunkt bei $y = 0$ mit dem linken Massenpunkt, den linken mit dem rechten, und den rechten mit einem Aufhängepunkt bei $y = 3L$ (siehe Skizze). Die Gleichgewichtslagen der Massen sind somit $y_{01} = L$ bzw. $y_{02} = 2L$.

(a) (1 Punkt) Geben Sie die potentielle Energie V des Systems als Funktion der Koordinaten y_1 und y_2 an.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die potentielle Energie, ausgedrückt durch die Auslenkungen $x_i(t) = y_i(t) - y_{0i}$ (mit $i = 1, 2$) relativ zu den Gleichgewichtslagen, in folgende Form gebracht werden kann:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_i \hat{V}_{ij} x_j \,, \qquad \text{mit} \qquad \hat{V} = k \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die zwei Massenpunkte in folgende Form gebracht werden kann,

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\hat{T}_{ij} \frac{d^2}{dt^2} + \hat{V}_{ij} \right) x_j(t) = 0$$

und geben Sie die Matrix $\hat{T}_{ij}$ explizit an.

5. Eigenschwingungen (Fortsetzung)

(d) (3 Punkte) Benutzen Sie einen exponentiellen Ansatz der Form $x_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ zur Lösung der Gleichung (c), und bestimmen Sie die Eigenfrequenzen $\omega^{(\alpha)}$ und dazugehörigen Eigenmoden $a_j^{(\alpha)}$ (mit $\alpha = 1, 2$) durch Lösen des entsprechenden Eigenwertproblems. [Hinweis: schreiben Sie zur Vereinfachung der Algebra die Frequenz als $\omega = \nu\sqrt{k/m}$, wobei ν dimensionslos ist, und lösen Sie das Eigenwertproblem für ν.]

(e) (1 Punkt) Skizzieren Sie qualitativ die Bewegung der beiden Massenpunkte als Funktion der Zeit für jede der beiden Eigenmoden (erste Skizze für $x_j^{(1)}(t)$, zweite Skizze für $x_j^{(2)}(t)$).