Greensche Funktionen (GF): Ergänzende Bemerkungen

28.05.2007 | GF2

Betrachte die inhomogene Differentialgleichung,

$$D_t\, f(t) = F(t) \qquad (1)$$

Differentialoperator → D_t; $f(t)$ ← gesuchte Funktion; $F(t)$ ← vorgegebene Funktion ("Inhomogener Term")

Satz: Sei $f_h(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung $D_t f_h(t) = 0$ (2)

und $G(t)$ eine Lösung der Gleichung $D_t\, G(t) = \delta(t)$ (3) ← Dirac-δ-Funktion.

($G(t)$ wird die "Greensche Funktion von D_t" genannt).

Dann kann die allgemeine Lösung von (1) kann wie folgt geschrieben werden:

$$f(t) = f_h(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t-t')\, F(t') \qquad (4)$$

GF2

"Beweis:"

$$D_t\, f(t) = \underbrace{D_t\, f_h(t)}_{(1.2)} + \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \underbrace{D_t\, G(t-t')}_{(1.3)}\, F(t') \qquad (1)$$

$$= 0 + \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \delta(t-t')\, F(t') \qquad (2)$$

$$= F(t) \quad \checkmark \qquad (3)$$

[beachte die große Allgemeinheit: D_t, $g(t)$, sind beliebig!]

Bemerkungen:

- Sinn und Zweck von GF ist also: nützlich bei der Konstruktion allgemeiner Lösungen von inhomogenen Differentialgleichungen.
- Die Form der Green'schen Funktion wird über die definierende Gleichung (1.3) durch den Differentialoperator D_t und die Angabe von "Randbedingungen" bestimmt.
- Zwei beliebte Randbedingungen sind

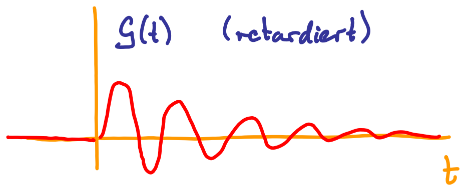
"retardierte" Greensche f.: $G(t) = 0$ für $t < 0$ (für T1 relevant) (4a)

"avancierte" Greensche f.: $G(t) = 0$ für $t > 0$ (nur für Fortgeschrittene Anwendungen) (4b)

- In der Vorlesung vom 10.5 wurde die Greensche Funktion für den harmonischen Oszillator als wichtiges Beispiel diskutiert.

Beispiel:

$$\underbrace{\left(\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2\right)}_{D_t} f(t) = \overset{\leftarrow\ \text{Antrieb}}{F(t)} \qquad (1)$$



Retardierte GF für den Fall $\omega_0 > \gamma$:

$$G(t) = \Theta(t)\,\frac{\sin \Omega t}{\Omega}\, e^{-\gamma t}, \quad \text{mit} \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \qquad (2)$$

Grund für die Nomenklatur "retardierte" GF: beschreibt die "Reaktion" eines zunächst ruhenden Oszillators auf eine plötzliche δ-Kraft bei $t=0$.

Die Reaktion erfolgt <u>nach</u> dem Schlag, ist also "retardiert" (buchstäblich: zurückgeblieben)