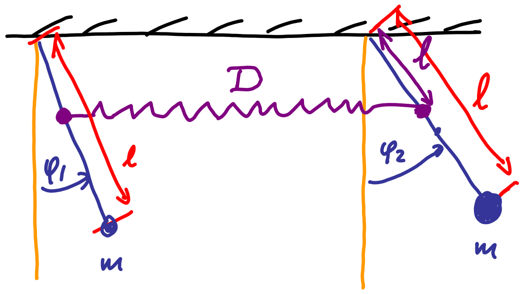
TI, SoSe 07 | Klausur 2: Musterlösung | 28.7.07 | 1.1

1. Gekoppelte Pendel



a) $$V = m g \ell (1 - \cos\varphi_1) + m g \ell (1 - \cos\varphi_2) + \tfrac{1}{2} D L^2 (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)^2 \quad (1)$$

$\leftarrow$ solange φ_1, φ_2 klein sind

da Auslenkung relativ zur Gleichgewichtslage $= L(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)$

$$T = \tfrac{1}{2} m \ell^2 \dot\varphi_1^2 + \tfrac{1}{2} m \ell^2 \dot\varphi_2^2 \quad (2)$$

$$L = T - V \quad (3)$$

1.2

Euler-Lagrange-Gl.: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$q_i = \varphi_1$: $$m \ell^2 \ddot\varphi_1 = - m g \ell \sin\varphi_1 - D L^2 (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) \cos\varphi_1$$

$\frac{1}{m\ell^2}$: $$\ddot\varphi_1 + \frac{g}{\ell} \sin\varphi_1 + \frac{D L^2}{m \ell^2} (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) \cos\varphi_1 = 0 \quad (4)$$

$q_i = \varphi_2$: $$m \ell^2 \ddot\varphi_2 = - m g \ell \sin\varphi_2 + D L^2 (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) \cos\varphi_2$$

$\frac{1}{m\ell^2}$: $$\ddot\varphi_2 + \frac{g}{\ell} \sin\varphi_2 - \frac{D L^2}{m \ell^2} (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2) \cos\varphi_2 = 0 \quad (5)$$

b) Kleine Ausschläge: $\sin\varphi_i \simeq \varphi_i$, $\cos\varphi_i \simeq 1 - \frac{1}{2}\varphi_i^2$

Linearisiere:

$$\ddot\varphi_1 + \omega_0^2 \varphi_1 + \kappa^2 (\varphi_1 - \varphi_2) \overset{(4)}{=} 0 \quad (6) \qquad \omega_0^2 = g/\ell$$

$$\ddot\varphi_2 + \omega_0^2 \varphi_2 - \kappa^2 (\varphi_1 - \varphi_2) \overset{(5)}{=} 0 \quad (7) \qquad \kappa^2 = \frac{D L^2}{m \ell^2}$$

1.3

Exponentialansatz:
$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

Eigenwertgleichungen:
$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + \kappa^2) A_1 - \kappa^2 A_2 \overset{(6)}{=} 0 \qquad (8)$$
$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + \kappa^2) A_2 - \kappa^2 A_1 \overset{(7)}{=} 0 \qquad (9)$$

Matrixschreibweise:
$$\boxed{\begin{pmatrix}-\omega^2 + \omega_0^2 + \kappa^2 & -\kappa^2 \\ -\kappa^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 + \kappa^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}} \qquad (10)$$

c) Charakteristisches Polynom:
$$(\omega_0^2 + \kappa^2 - \omega^2)^2 - \kappa^4 = 0$$
$$\omega_0^4 + \omega^4 - 2\omega^2(\omega_0^2 + \kappa^2) + 2\omega_0^2\kappa^2 = 0$$

1.4

$$\omega^2 = (\omega_0^2 + \kappa^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{4(\cancel{\omega_0^2} + \kappa^2)^2 - 4(\cancel{\omega_0^4} + 2\omega_0^2\kappa^2)}$$
$$= (\omega_0^2 + \kappa^2) \pm \kappa^2$$
$$= \omega_0^2 \quad \text{oder} \quad \omega_0^2 + \kappa^2$$

Eigenfrequenzen:

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_1^2 &= \omega_0^2 \\ \omega_1^2 &= \omega_0^2 + 2\kappa^2\end{aligned}}$$

beide Pendel schwingen in Phase, also ist Federkonstante irrelevant

Pendel schwingen genau gegenläufig also wird Pendelfrequenz erhöht.

Eigenmoden:

Mode 1: Pendel sind vermutlich gleichläufig, also probiere:
$$\boxed{\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}$$

11.5

Check:
$\omega = \omega_0 \overset{(9)}{\Longrightarrow}$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 + \kappa^2 & -\kappa^2 \\ -\kappa^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 + \kappa^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

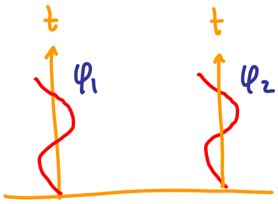
Mode 2:

Pendel sind vermutlich gegenläufig, also probiere:

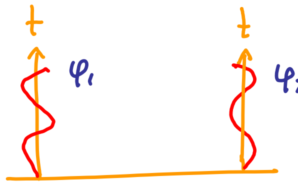
$$\boxed{\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Check:
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\kappa^2 \overset{(9)}{\Longrightarrow}$

$$\begin{pmatrix} -(\omega_0^2 + 2\kappa^2) + \omega_0^2 + \kappa^2 & -\kappa^2 \\ -\kappa^2 & -(\omega_0^2 + 2\kappa^2) + \omega_0^2 + \kappa^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$



Mode 1



Mode 2

11.6

d) Allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left\{ \frac{c_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa^2}\, t} \right\}$$

Schreibe
$c_i = |c_i| e^{i\alpha_i}$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|c_1| \cos(\omega_0 t + \alpha_1) + c_2 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa^2}\, t + \alpha_2\right) \right]$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|c_1| \cos(\omega_0 t + \alpha_2) - |c_2| \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa^2}\, t + \alpha_2\right) \right]$$

(e)
Anfangsbedingungen:

$$\left.\begin{matrix} \varphi_1(0) = \varphi_0 , & \varphi_2(0) = 0 \\ \dot\varphi_1(0) = 0 , & \dot\varphi_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{matrix} |c_1| = |c_2| = \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} \\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\varphi_0}{2} \left[\cos\omega_0 t + \cos\sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa^2}\, t \right] \\ \varphi_2 &= \frac{\varphi_0}{2} \left[\cos\omega_0 t - \cos\sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa^2}\, t \right] \end{aligned}}$$

4. Verschobener Harmonischer Oszillator

4.1

Hamilton-Funktion: $$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (q-q_1)^2 := E = \text{const.} \qquad (1)$$

Erzeugende: $$F_2(q,E,t) \overset{(40.1)}{=} -Et + W(q,E) \qquad (2)$$

a) Reduzierte Hamilton-Jacobi-Gleichung: $$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial}{\partial q} W(q,E)\right]^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 (q-q_1)^2 \overset{(1)}{=} E \qquad (4)$$

b) Diff.Gl. für $W(q,E)$: $$\frac{\partial}{\partial q} W(q,E) \overset{(3)}{=} \sqrt{2mE - m^2\omega^2(q-q_1)^2} \qquad (5)$$

Integriert: $\int_0^q dq'$ (4): $$W(q,E) - \underbrace{W(0,E)}_{:=0} = \int_0^q dq' \sqrt{2mE - m^2\omega^2(q'-q_1)^2} \qquad (6)$$

4.2

c) Transformations-gleichungen:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2(q-q_1)^2} \qquad (1)$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E}\left[-Et + W(q,E)\right] \qquad (2)$$

$$= -t + \int_0^q dq' \, \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}m}{\sqrt{2mE - m^2\omega^2(q'-q_1)^2}} \qquad (3)$$

Angegeben: $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

$$= -t + \frac{1}{\omega} \arcsin\left[\frac{m\omega(q-q_1)}{\sqrt{2mE}}\right] - \frac{1}{\omega} \underbrace{\arcsin\left[\frac{m\omega(-q_1)}{\sqrt{2mE}}\right]}_{=:\varphi_0} \qquad (4)$$

d) Setze $Q = \beta = \text{const.}$ das ist möglich, weil die neue Hamiltonfunktion $\tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$, per Konstruktion, sodaß $\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 0 \Rightarrow Q = \text{const.}$

Auflösen nach q(t) und p(t)

$$q(t) \overset{(4.2.4)}{=} q_1 + \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin\left[\omega(t + \underbrace{\beta + \varphi_0}_{=\beta'})\right] \quad (1)$$

Interpretation: wie erwartet für verschobenen HO.

$$p(t) \overset{(4.2.1),(1)}{=} \sqrt{2mE}\sqrt{1 - \sin^2\omega(t+\beta')} = \sqrt{2mE}\cos\omega(t+\beta') \quad (2)$$

Anfangsbedingungen bei t=0: $q(t=0) = 0, \quad p(t=0) = 0$

$$E \overset{(4.1.1)}{=} \tfrac{1}{2}m\omega^2 q_1^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = q_1$$

$$q(0) = 0 \overset{(4.3.1)}{=} -q_1 + q_1 \sin(\beta') \quad \Rightarrow \quad \beta' = \pi/2$$

Damit sind beide erhaltene Größen, E und Q, eindeutig bestimmt.

Endgültige Form der Lösung:

$$\boxed{q(t) \overset{(1)}{=} q_1(1 - \cos\omega t), \quad p(t) \overset{(2)}{=} m\omega q_1 \sin\omega t}$$