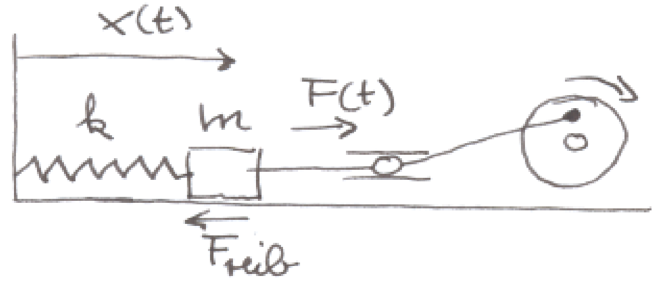
Erzwungene Schwingungen eines gedämpften harmonischen Oszillators



$$\cancel{m}\ddot{x} = \left(F_{Fed} + F_{reib} + F(t)\right)\frac{1}{m}$$

$$= -\frac{k}{m}x - \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{F(t)}{m}$$

$$=: -\omega_0^2 x - 2\lambda \dot{x} + f(t)$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$: Eigenfrequenz, $\lambda \geq 0$

<u>Aufgabe</u>: Löse $L_t x := \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\lambda\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x = f(t)$
für beliebig vorgegebenen Antrieb

Allg. Form der Lsg:

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_f(t)$$

<u>allgem.</u> Lsg von $L_t x_{hom} = 0$: 2 Integrationskonst.

eine <u>spezielle</u> Lsg v. $L_t x_f = f(t)$

1. Homogene DGl

$$\ddot{\varphi} + 2\lambda\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

Ansatz: $\varphi(t) = \mathrm{Re}(e^{i\nu t})$ $\Big\} \Rightarrow$

$$(-\nu^2 + 2\lambda i\nu + \omega_0^2)e^{i\nu t} = 0$$

$$\boxed{\nu_\pm = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} + i\lambda}$$

Fälle:

$\underline{0 \leq \lambda < \omega_0}$ $\quad \mathbb{R} \ni \Omega := \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} > 0$

$$\nu_\pm = \pm\Omega + i\lambda$$

$$x_{hom}(t) = \mathrm{Re}(c_+ e^{i\Omega t} e^{-\lambda t} + c_- e^{-i\Omega t} e^{-\lambda t})$$

$$c_\pm = |c| e^{\pm i\alpha}$$

$\underline{\omega_0 < \lambda}$ $\quad \mathbb{R} \ni \Gamma := \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} < \lambda$

$$\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{-1(\lambda^2 - \omega_0^2)} = i\Gamma$$

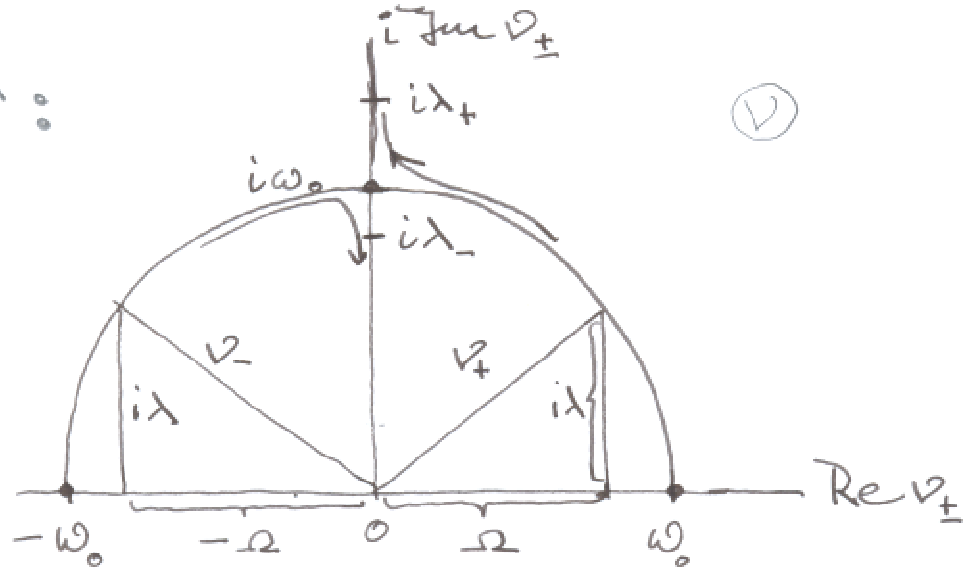
$$\nu_\pm = i(\lambda \pm i\Gamma) =: i\lambda_\pm$$

$$x_{hom}(t) = A_+ e^{-\lambda_+ t} + A_- e^{-\lambda_- t}$$

$\underline{\omega_0 = \lambda}$ $\qquad \nu_\pm = i\lambda$

$$x_{hom}(t) = (A + Bt)\, e^{-\lambda t}$$

$\lambda \uparrow$:



2. Inhomogene DGl

Suchen Partikularlsg zu gegebenem $f(t)$

2.1 Harmonischer Antrieb

$$f(t) = f_\omega \cos \omega t = f_\omega \, \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t}\right) \qquad f_\omega \in \mathbb{R}$$

Ansatz: $x_f(t) = \mathrm{Re}\left(\chi_\omega f_\omega e^{-i\omega t}\right)$

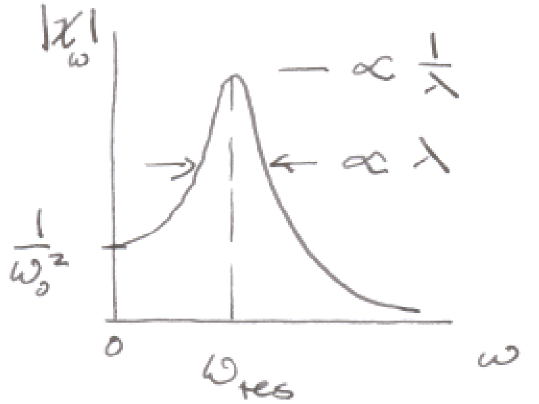
$$L_t\left(\chi_\omega e^{-i\omega t}\right) = e^{-i\omega t} \quad \Longrightarrow$$

$$\chi_\omega = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-2i\omega\lambda}$$

$$= |\chi_\omega|\, e^{i\delta_\omega}$$

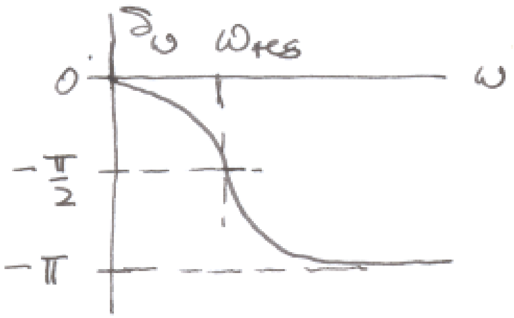
<u>Dynamische Suszeptibilität</u> (Impedanz)

$\lambda < \omega_0$:



Resonanz

$$= \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$



2.2 Beliebiger Antrieb: f(t) als Überlagerung harmonischer Kräfte

Fourier-transf.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{f}(\omega)\, e^{-i\omega t}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{i\omega t}$$

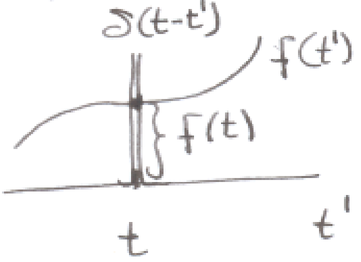
NB: Vorz.- & 2π-Konv.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega(t-t')}}_{=:\ \delta(t-t')} f(t')$$

Dirac-δ Distribution ("δ-Funktion")

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \delta(t-t')\, f(t') \quad \left(= \langle \delta_t, f \rangle\right)$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \delta(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt''\, \delta(t'')$$

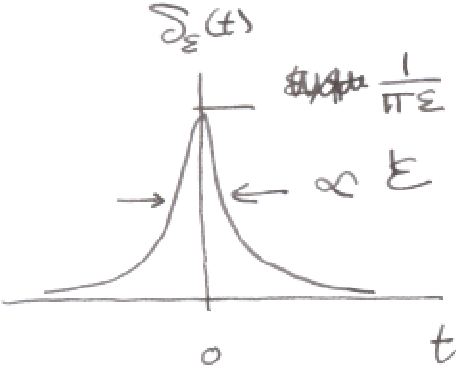


"Regularisierung":

$$\delta_\varepsilon(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t - |\omega|\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right) e^{-\omega\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon + it} + \frac{1}{\varepsilon - it}\right) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + t^2}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\, dt = 1$$

[nützliche Formel:

$$\frac{1}{x - i\eta} = \frac{x}{x^2+\eta^2} + i\pi\,\delta_\eta(x)$$

$$\xrightarrow{\eta\to 0} \frac{HW}{x} + i\pi\,\delta(x)$$

$$HW\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\psi(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\eta}\frac{\psi(x)}{x}\,dx + \int_{\eta}^{\infty}\frac{\psi(x)}{x}\,dx\right) \Big]$$

Zurück zu inhomog. DGl:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \\ &x_f(t) = \int\frac{d\omega'}{2\pi}\,\tilde{x}_f(\omega')\,e^{-i\omega' t}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \qquad \left(\int := \int_{-\infty}^{\infty}\right)$$

$$\int\frac{d\omega'}{2\pi}\left[(-\omega'^2 - 2i\lambda\omega' + \omega_0^2)\,\tilde{x}_f(\omega')\,e^{-i\omega' t}\right.$$

$$= \int\frac{d\omega'}{2\pi}\,\tilde{f}(\omega')\,e^{-i\omega' t}. \quad \Big|\cdot e^{i\omega t}$$ aufintegrieren.

Mit $\int dt\, e^{i(\omega-\omega')t} = 2\pi\,\delta(\omega-\omega')$ findet man:

Vorgabe

$$\boxed{\tilde{x}_f(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega}}$$

$$\frac{\tilde{x}_f(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} =: \chi(\omega) = -\frac{1}{(\omega-\nu_+)(\omega-\nu_-)}$$

Auslenkung / Antrieb

<u>Bem.</u> $\mathbb{R} \ni f(t) = f^*(t) \Leftrightarrow \tilde{f}^*(\omega) = \tilde{f}(-\omega)$ $\Big\}$ $\Rightarrow$

haben $\chi^*(\omega) = \chi(-\omega)$

$\tilde{x}_f^*(\omega) = \tilde{x}_f(-\omega) \Rightarrow x^*(t) = x(t)$

$$\boxed{G(t) := \int \frac{d\omega}{2\pi} \chi(\omega) e^{-i\omega t}}$$

$$x_f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \chi(\omega) e^{-i\omega t} \int dt' e^{i\omega t'} f(t')$$

$$\boxed{x_f(t) = \int dt' \, G(t-t') f(t')}$$

„quellenmäßige" Darstellung der Partikularlsg mittels der sog. <u>Greenschen Funktion $G(t)$</u>

$f(t) = \delta(t)\cdot v$: $\quad G(t) = x_{v\delta}(t)/v$

$$\Rightarrow \boxed{L_t G(t) = \delta(t)}$$

$[G] = \text{Zeit}^2$

$[v] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$

$[\delta] = \text{Zeit}^{-1}$

- Bestimmung von $G(t)$

– entweder über Fouriertransf. ($\chi(\omega) \xrightarrow{FT} G(t)$)

– oder Konstruktion mit Hilfe der <u>Kausalitätsbedingung</u>: ("zuerst Kraftstoß, <u>dann</u> Auslenkung")

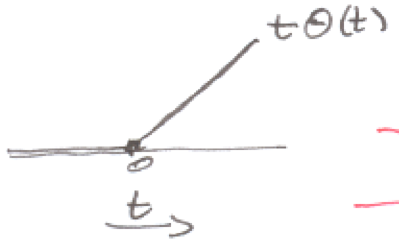
$$G(t-t') \propto \Theta(t-t')$$

(Stufenfkt: $\Theta(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$)

[Einschub:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t')\,dt' = \Theta(t) \quad : \quad \dot{\Theta}(t) = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \Theta(t')\,dt' = t\,\Theta(t) \quad : \quad \text{Knick}$$



]

$L_t G(t) = \ddot{G}(t) + \dots = \delta(t)$
Kausalität
$\Big\} \Rightarrow$

$G(t) <$ Knick bei $t=0$; $\Theta(t)\, g(t)$, $L_t g(t) = 0$

sei $\omega_0 > \lambda$:

Ansatz $t \geq 0$: $g(t) = e^{-\lambda t}\left(A \sin \overset{\Omega}{\cancel{\omega_0}} t + B \cos \overset{\Omega}{\cancel{\omega_0}} t\right)$

G-Knick bei $t=0$ $\Rightarrow$ $B = 0$, $A = \frac{1}{\cancel{\omega_0}\,\Omega}$: $g(t) = t + O(t^2)$ für $t > 0$

Damit:

$$\boxed{G(t) = \Theta(t)\,\frac{\sin(\cancel{\omega_0}\,\Omega t)}{\cancel{\omega_0}\,\Omega}\,e^{-\lambda t}} \qquad (\omega_0 > \lambda)$$

Check:
$$\dot G = \underbrace{\cancel{\delta(t)\,g(t)}}_{0} + \Theta(t)\,\dot g(t)$$
$$\ddot G = \underbrace{\delta(t)\cos(\cancel{\omega_0}\,\Omega t)\,e^{-\lambda t}}_{\delta(t)} + \Theta(t)\,\ddot g(t)$$
$$L_t G = \delta(t) + \Theta(t)\big[\underbrace{\ddot g + 2\lambda \dot g + \omega_0^2 g}_{=0}\big]$$

<u>Ergebnis</u>: Allgemeine Lsg der DGL $L_t x = f(t)$:

$$x(t) = x_{hom}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')\,f(t')\,dt'$$
$$= x_{hom}(t) + \int_{-\infty}^{t} g(t-t')\,f(t')\,dt'$$

Check: $L_t x(t) = 0 + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')\,f(t')\,dt'$
$$= f(t)$$

Deterministisches Chaos

Poincaré-Abb:

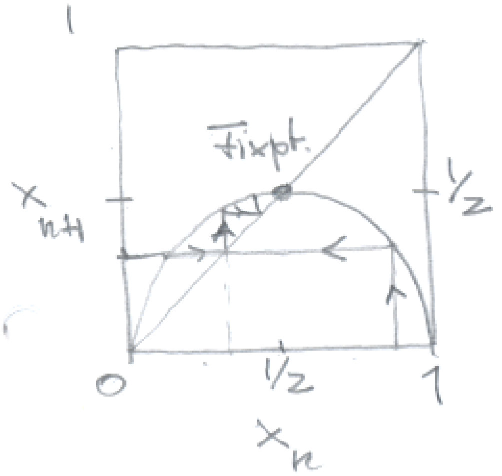
$$\overset{t_1}{(x_1, y_1)} \longmapsto \overset{t_2}{(x_2, y_2)}$$

<u>1d Bsp.</u> Logistische Abb.

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n),$$

$$0 \leq r \leq 4 : [0,1] \ni x_n \longmapsto x_{n+1} \in [0,1]$$

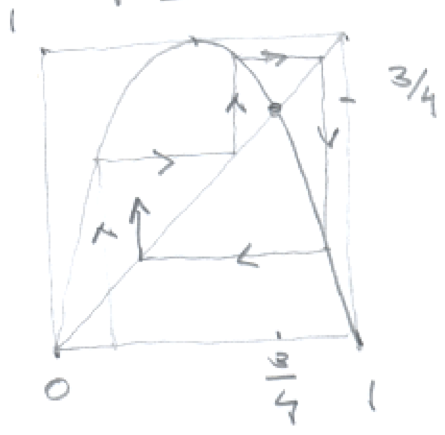
$r = 2$



Fixpt (stabil)

$$x^* = 2x^* - 2x^{*2}$$

$r = 4$



Fixpt (instabil)

$$x^* = 4x^* - 4x^{*2}$$

Variablentransf. 2)

$$x_n = \frac{1}{2}(1-\cos(2\pi\varphi_n)), \quad \varphi_n \in [0,1]$$

$\underline{r=4}$: $\frac{1}{2}(1-\cos(2\pi\varphi_{n+1})$

$$= 1-\cos^2(2\pi\varphi_n)$$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos(2\pi 2\varphi_n))$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{n+1} = \underline{2\varphi_n \ (\mathrm{mod}\, 1)}$$

φ binär: $\varphi = a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + a_3 2^{-3} + \ldots, \quad a_i = 0,1$

$$=: 0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots$$

$$2\varphi = a_1, a_2 a_3 \ldots, \quad 2\varphi\,(\mathrm{mod}\,1) = 0{,}a_2 a_3 \ldots$$

zB: $\varphi_0 = 0{,}11010\ldots, \quad \varphi_1 = 0{,}1010\ldots,$

$\varphi_3 = 0{,}010\ldots$

Computergenauigkeit $10^{-16} \simeq 2^{-50}$

$n > 50$: Rechner liefert Zahlen φ_n die nichts mehr mit den Lösungen der Logist. Gl. gemein haben.