Prof. Dr. Jan von Delft
Theresienstr. 37, Zi. 420
Dr. Vitaly N. Golovach
vitaly.golovach@physik.lmu.de

Endklausur zur Vorlesung T1: Theoretische Mechanik, SoSe 2007

(28. Juli 2007)

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte + 2 Bonuspunkte

Schreiben Sie bitte auf *jedes* Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen.
Erlaubte Hilfsmittel: Ein neues beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt, das entsprechende Blatt für die Probeklausur, sowie die mathematische Formelsammlung von Bronstein.

Name:
Gruppe:
Matrikel-Nummer:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					
Korrektur					

1. Gekoppelte Pendel [8 Punkte + 1 Bonuspunkt]
Wir betrachten zwei mathematische Pendel gleicher Masse m und Fadenlänge l, die durch eine Feder mit Elastizitätskonstante D miteinander gekoppelt sind (siehe Abb. 1). Der Abstand zwischen den Aufhängepunkten der Pendel sei viel größer als die Pendellänge l, sodass vertikale Bewegungen der Feder im Vergleich zu horizontalen vernachlässigbar klein sind. Die zwei Winkel φ_1 und φ_2 werden als verallgemeinerte Koordinaten des Systems gewählt. Die Gleichgewichtslage des Systems ist durch $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ gegeben.

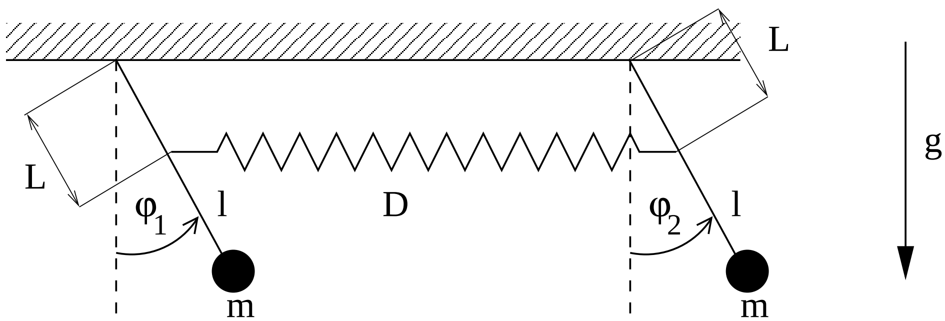


Abbildung 1: Zwei gekoppelte Pendel

a) [2 Punkte] Geben Sie die Lagrange-Funktion des Systems in den Koordinaten (φ_1, φ_2) an. Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 2. Art für die zwei gekoppelten Pendel auf, und leiten Sie die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten φ_1 und φ_2 her.
Ergebnis: Sie bekommen folgende Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \frac{\mathrm{g}}{l}\sin\varphi_1 + \frac{D\,L^2}{ml^2}(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)\cos\varphi_1 = 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + \frac{\mathrm{g}}{l}\sin\varphi_2 - \frac{D\,L^2}{ml^2}(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)\cos\varphi_2 = 0 \end{aligned}$$

b) [2 Punkte] Betrachten Sie im Folgenden den Fall kleiner Auslenkungen, in dem die Bewegungsgleichungen linearisiert werden können. Zeigen Sie mittels des Ansatzes

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t},$$

dass die Eigenfrequenzen durch ein Eigenwertproblem der Form

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 + \kappa^2 & -\kappa^2 \\ -\kappa^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 + \kappa^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

bestimmt werden können, und geben Sie ω_0 und κ an.

c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenmoden des Systems. Skizzieren Sie qualitativ die Bewegung der beiden Massenpunkte als Funktion der Zeit für jede Eigenmode.

d) [1 Punkt] Geben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen an.

e) [Optional] [1 Bonuspunkt] Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = \varphi_0, \qquad \varphi_2(0) = 0, \qquad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0.$$

2. Durchhängende Hochspannungsleitung [8 Punkte]
Eine homogene Hochspannungsleitung mit Leitungslänge l und Masse m ist an zwei Punkten A und B, mit Koordinaten $(x, y) = (-x_0, 0)$ und $(x_0, 0)$, in einem konstanten Gravitationsfeld aufgehängt. Die Form der durchhängenden Hochspannungsleitung sei durch die Kurve $y(x)$ beschrieben. Ziel ist, diese zu bestimmen.

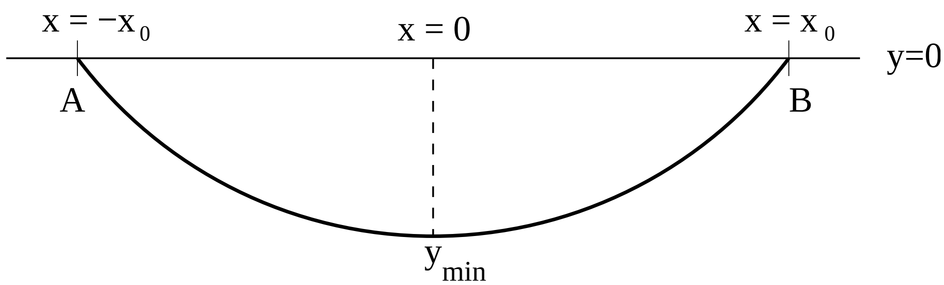


Abbildung 2: Durchhängende Hochspannungsleitung

a) [1 Punkt] Bestimmen Sie die potenzielle Energie U der durchhängende Hochspannungsleitung für eine beliebige Funktion $y(x)$ und geben Sie das Funktional $U[y(x)]$ an.
<u>Hinweis:</u> $dm = (m/l)ds$

b) [1 Punkt] Schreiben Sie die Nebenbedingung (Leitungslänge $= l$) in Form eines Funktionals $L[y(x)] = l$.

c) [2 Punkte] Nun ist die potenzielle Energie unter der Nebenbedingung konstanter Leitungslänge zu minimieren. Bringen Sie dieses Problem unter Zuhilfenahme eines Lagrange-Multiplikators λ in die Form eines Variationsproblems der allgemeinen Form

$$\delta \int_{-x_0}^{x_0} F(y, y', x) dx = 0$$

für die Funktion $y(x)$, und geben Sie F an.
<u>Hinweis:</u> Die Funktion F ist im vorliegenden Fall nicht von x abhängig.

d) [2 Punkte] Die Euler-Lagrange-Gleichung für dieses Variationsproblem ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Anstatt diese aufzustellen und zu integrieren, wollen wir hier einen kürzeren Weg gehen: Es kann gezeigt werden, dass für x-unabhängige F auch folgende "Erhaltungsgrösse" x-unabhängig ist:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = c = \text{const.} \tag{1}$$

Zeigen Sie, ausgehend von Gl. (1), dass die Funktion $y(x)$ folgende Differentialgleichung 1. Ordnung erfüllt:

$$y' = \pm\sqrt{\left[\frac{mgy/l \pm \lambda}{c \pm \lambda l/(2x_0)}\right]^2 - 1}. \tag{2}$$

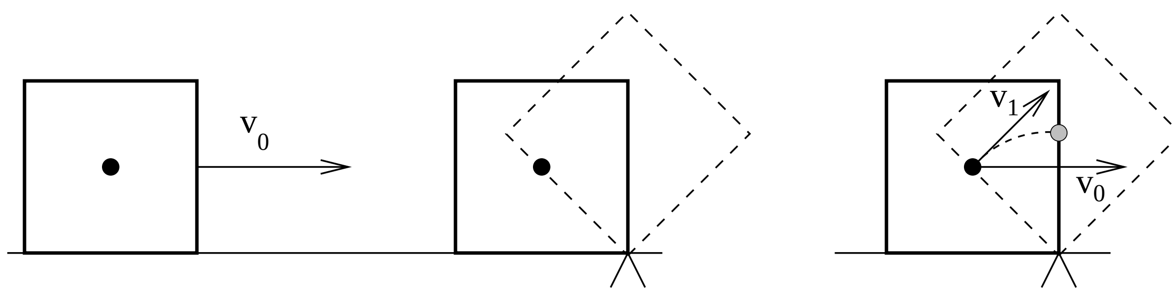
Bemerkung: das Vorzeichen von λ, + oder −, ist eine Frage der Konvention, deswegen sind in Gl. (2) beide Möglichkeiten angegeben.

e) [1 Punkt] Finden Sie eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2), und nennen Sie die dabei auftretende Integrationskonstante a.
Hinweis:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \operatorname{arccosh} z + a.$$

f) [1 Punkt] Geben Sie drei (Rand- oder Neben-) Bedingungen an die Funktion $y(x)$ an, die dazu genutzt werden könnten, die drei bisher unbekannten Konstanten c, a und λ zu bestimmen. Klarstellung: Letzteres, d.h. die explizite Bestimmung der unbekannten Konstanten, wird hier nicht verlangt.

3. Überkippen eines Würfels [8 Punkte + 1 Bonuspunkt]
Ein homogener Würfel der Kantenlänge a und Masse m gleite zunächst mit konstanter Geschwindigkeit v_0 (in x-Richtung) auf einem glatten, reibungsfreien horizontalen Tisch. Vier der Kanten des Würfels seien parallel zur Geschwindigkeit. Eine zur Bewegungsrichtung senkrecht (in z-Richtung) verlaufende Schwelle von vernachlässigbarer Höhe stoppe plötzlich die vordere, untere Kante des Würfels, so dass der Würfel nach vorne kippe, und sich im weiteren Zeitverlauf um die Schwelle als "Rotationsachse" dreht. Für die Kollision machen wir folgende Annahmen: (i) Die Kollision des Würfels mit der Schwelle ist inelastisch (d.h. mechanische Energie ist beim Stoß nicht erhalten). (ii) Die von der Schwelle auf den Würfel ausgeübten Kräfte verursachen keine Drehmomente (verschwindender Hebelarm), folglich ändert sich der Drehimpuls um die Rotationsachse *nicht* ("Drehimpulserhaltung beim Stoss"). (iii) Die Schwerkraft kann für die Dauer des Stoßes ignoriert werden (wie schon in Annahme (ii) geschehen); sie muss aber bei der darauffolgenden Kippbewegung berücksichtigt werden.



a) [2 Punkte] Bestimmen Sie den Trägheitstensor und die Hauptträgheitsmomente des Würfels bezüglich des Schwerpunkts.

b) [Optional] [1 Bonuspunkt] In welche Richtungen (relativ zu den Flächen des Würfels) kann eine Hauptachse dieses Trägheitstensors zeigen?

c) [1 Punkt] Zeigen Sie mittels des Steinerschen Satzes, dass das Trägheitsmoment für Drehungen um die durch den Kollisionspunkt verlaufende Rotationsachse durch $I = (2/3)ma^2$ gegeben ist.

d) [2 Punkte] Im Laufe der Kippbewegung beschreibt der Schwerpunkt des Würfels eine kreisförmige Bewegung um die Rotationsachse. Verwenden Sie Drehimpulserhaltung beim Stoß, um die Winkelgeschwindigkeit ω_1 unmittelbar nach dem Stoß zu bestimmen (als Funktion von v_0 und a).

e) [1 Punkt] Finden Sie nun auch die Geschwindigkeit v_1 des Schwerpunkts unmittelbar nach dem Stoß. (<u>Hinweis:</u> v_1 ist proportional zu ω_1.) Um welchen Betrag vermindert sich die kinetische Energie des Schwerpunkts beim Stoß?

f) [2 Punkte] Nutzen Sie Energie-Erhaltung während der auf den Stoß folgenden Kippbewegung, um die Grenzgeschwindigkeit $v_0 = v_g$ zu bestimmen, die die Fälle des Zurückfallens und des überkippens des Würfels trennt.

4. Verschobener Harmonischer Oszillator [6 Punkte]
Ein verschobener Harmonischer Oszillator ist durch die zeitunabhängige Hamilton-Funktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(q-q_1)^2 = E,$$

beschrieben, wobei E die erhaltene Energie darstellt, und q_1 eine konstante ist. Als Anfangsbedingungen wählen wir $q(t=0)=0$ und $p(t=0)=0$. Ziel dieser Aufgabe ist es, $q(t)$ und $p(t)$ mittels einer kanonischen Transformation zu bestimmen, die so gewählt ist, dass der neue erhaltene Impuls der Energie entspricht, d.h. $P = E$. Dazu wählen wir eine Erzeugende der Form

$$F_2(q,E,t) = -Et + W(q,E), \tag{3}$$

mit Anfangsbedingung $W(0,E) = 0$.

a) [1 Punkt] Geben Sie die reduzierte Hamilton-Jacobi-Gleichung für $W(q,E)$ an.

b) [1 Punkt] Lösen Sie die reduzierte Hamilton-Jacobi-Gleichung nach $\frac{\partial W}{\partial q}$ auf, und zeigen Sie per Integration, dass die Funktion $W(q,E)$ folgende Form hat:

$$W(q,E) = \int_0^q dq' \sqrt{2mE - m^2\omega^2(q'-q_1)^2}. \tag{4}$$

c) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Funktionen $p = p(q,E)$ und $Q = Q(q,E)$ mittels entsprechender Transformationsgleichungen, ausgehend von den Gleichungen (3) und (4).

<u>Hinweis:</u>

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

d) [2 Punkte] Setzen Sie nun $Q = \beta = const.$ (warum ist das möglich?). Bestimmen Sie aus den Ergebnissen von Teil (b) $q = q(t)$ und $p = p(t)$ als Funktionen der Zeit t, unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen. Interpretieren Sie das Ergebnis.