T1: Theoretische Mechanik, SoSe 2007

(v1) 16.4.07 NMO

Jan von Delft

[Newtonsche Mechanik]

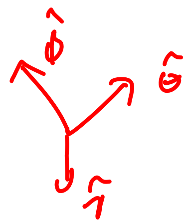
Newtonsche Sätze (Originalformulierung)

1. Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte dazu gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.

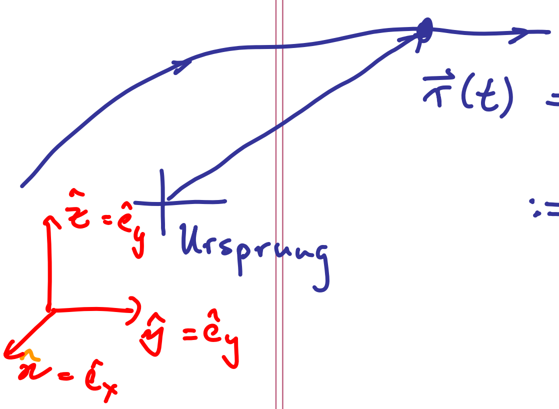
2. Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

3. Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich; oder: die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Begriffsbildung: Massenpunkt, Bahnkurve, Masse, Kraft, Beschleunigung, Drehimpuls, Energie, Erhaltungsätze ...



1. Bahnkurve



$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{e}_x + y(t)\,\hat{e}_y + z(t)\,\hat{e}_z$$

$$:= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\,\hat{e}_x + \dot{y}(t)\,\hat{e}_y + \dot{z}(t)\,\hat{e}_z$

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\,\hat{e}_x + \ddot{y}(t)\,\hat{e}_y + \ddot{z}(t)\,\hat{e}_z$

2. Newton's Axiome

NM2

1. Axiom (N1):
(Definition von Inertialsystem)

Es gibt Bezugsysteme (BS), in denen kräftefreie Bewegung durch $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v} = \text{konst.}$ beschrieben wird.

Diese BS heißen Inertialsysteme (IS).

N1 gilt nicht in jedem BS (z.B. nicht auf Karusell)

In IS sind physikalischen Gesetze besonders einfach

N1 ist nicht Spezialfall von N2 mit Kraft = 0, sondern Definition von IS.

NM3

2. Axiom (N2):
(beschreibt Dynamik)

In einem IS folgt die Bewegung unter Einfluß einer Kraft folgendem Gesetz:

$$m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{K} \quad \text{im IS}, \qquad \vec{p} = m\,\vec{v}$$

Kraft

Impuls

Masse

Geschw.

Einheit = $N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$

N2 beinhaltet
(i) Definition der Masse (vergleiche Beschl. für gleiche Kraft),
(ii) Definition der Kraft (als Beschleunigung mal Masse),
(iii) Aussage über Bahnbewegung

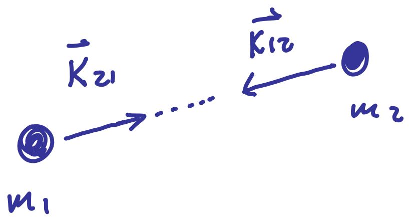
N2 gilt nur für "nicht-relativistische" Geschwindigkeiten:

$$v \ll c$$

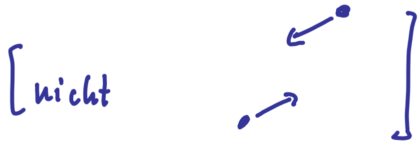
NM4

3. Axiom (N3):
(Actio = Reactio)

$$\vec{K}_{actio} = -\vec{K}_{reactio}$$



1.ster Zusatz: Kraft entlang Verbindungslinie



2.ter Zusatz:
(Superpositions-Prinzip)

$$\underbrace{\vec{K}}_{\text{Gesamtkraft}} = \underbrace{\sum_i \vec{K}_i}_{\text{Summe der Einzelkräfte}}$$

Gültigkeit von N3 ist eingeschränkt, denn N3 impliziert "instantane" Reaktion, im Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie (<u>nichts</u> propagiert schneller als Licht)

Ausweg: Quantenfeldtheorie: Kraft via Austausch von Photonen f. EM-WW, Gluonen f. starke WW, Gravitonen für Gravitation

---

NM5

<u>Beispiel</u>: Lösung von N2 für 1-dimensiones Problem

Betrachte:

$$m\ddot{x} = K(x(t)) \qquad (5.1)$$

ortsabhängige Kraft

wobei

$$K(x) = -\partial_x U(x) \qquad \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} \qquad (5.2)$$

$\dot{x} \times (5.1)$:

$$m\dot{x}\ddot{x} = -\dot{x}\,\partial_x U(x(t)) \qquad (5.3)$$

Kettenregel

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x})^2 = -\frac{d}{dt}U(x(t)) \qquad (5.4)$$

Integrieren: $\int dt$

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 = E - U(x(t)) \qquad (5.5)$$

Integrationskonstante (zeitunabhängig)

Gesamtenergie:
(erhaltene Größe, weil zeitunabhängig)

$$\boxed{E = \underbrace{\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\text{Kinetische,}} + \underbrace{U(x)}_{\text{Potentielle}}} \qquad (5.6)$$

Energie

NM6

(5.5) nach $\dot{x}$ gelöst:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)} \qquad (6.1)$$

Trennung d. Variablen:

$$\int_{t_0}^{t} dt' = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\ldots}} \qquad (6.2)$$

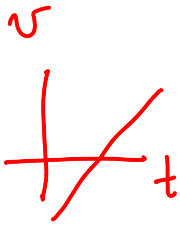
$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\left[\frac{2}{m}\left(E - U(x')\right)\right]^{1/2}} \qquad (6.3)$$

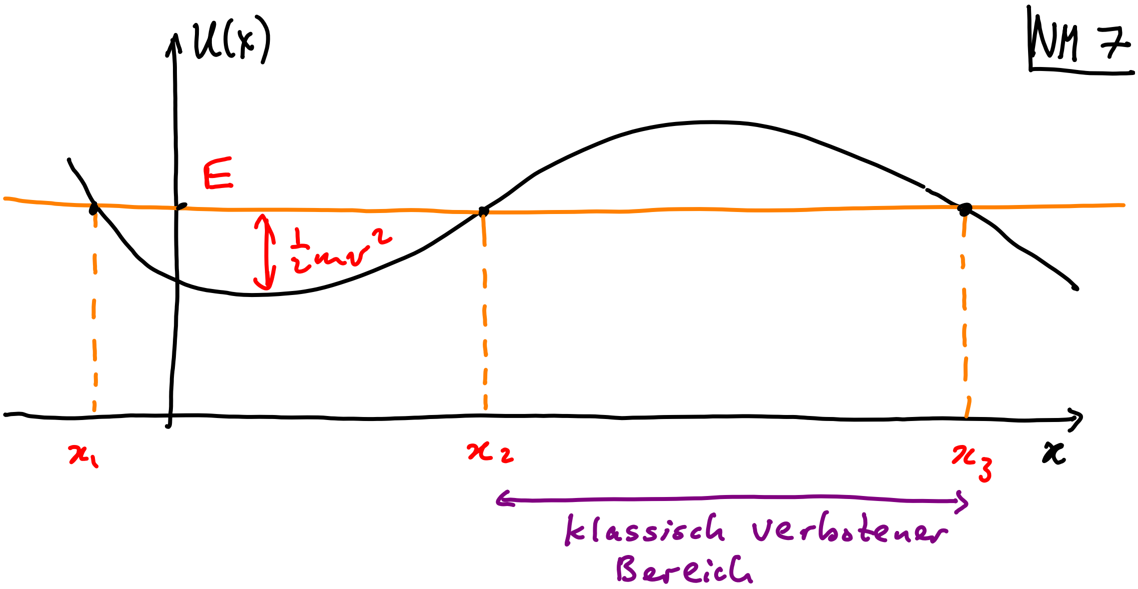
Anfangsbedingungen: $x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0,$ (6.4)

legen Integrationskonst. fest: $E = \frac{1}{2} m v_0^2 + U(x_0)$

NM 7

Graphische Analyse:





Umkehrpunkte: Bei $\dot{x} = 0$, also bei x_1, x_2, x_3

Zwischen Umkehrpunkten ist Bewegung periodisch:

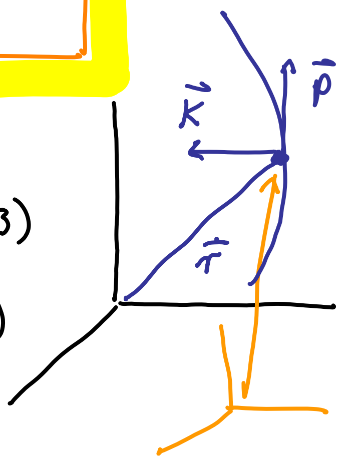
Periode: $$\frac{1}{2} T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{\left[\frac{2}{m}\left(E - U(x')\right)\right]^{1/2}} \qquad (7.1)$$

3. Erhaltungssätze

Zunächst mittels N2 hergeleitet, später (eleganter) mittels Lagrange-Formalismus
"zu Fuß" "tieferer Grund":
Symmetrien!

N2: $$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{K} ,\qquad (8.1)$$

Impulserhaltung: $$\vec{K} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{p} = \text{konst.}\qquad (8.2)$$



Definition Drehimpuls: $$\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\dot{\vec{r}}\qquad (8.3)$$

Definition Drehmoment: $$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{K}\qquad (8.4)$$

(beide abhängig von

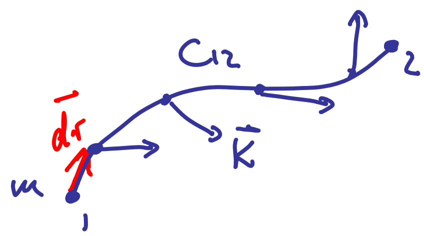
$$\frac{d}{dt}\vec{\ell} \overset{(8.3)}{=} \dot{\vec{r}}\times(m\dot{\vec{r}}) + \vec{r}\times\dot{\vec{p}} \overset{(8.1)}{=} \vec{K}\qquad (9.1)$$
$$= 0 + \vec{r}\times\vec{K} \overset{(8.4)}{=} \vec{M}$$

$$\dot{\vec{\ell}} = \vec{M}\qquad \text{("N2 für Rotationen")}\qquad (9.2)$$

Drehimpulserhaltung: $$\vec{M} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{\ell} = \text{konst.}\qquad (9.3)$$

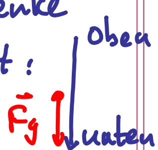
Definition v. Arbeit: Teilchen (Masse m) bewege sich unter Einfluss einer äusseren Kraft von 1 nach 2 entlang Weg C. Die von der Kraft auf m geleistete Arbeit ist:

$$A_{1\to 2} = \int_{C_{12}} d\vec{r}\cdot\vec{K}\qquad (9.4)$$



= vom Kraftfeld auf m übertragene Energie

Vorzeichen? Denke an Schwerkraft:



$$\int_{\text{oben}}^{\text{unten}} d\vec{r}\cdot\vec{F}_g = mgh > 0$$

NM10

$\vec{dr} = \frac{\vec{dr}}{dt} \cdot dt = \vec{v}\,dt$

$$A_{1\to 2} \overset{(9.4)}{=} \int_{t_1}^{t_2} (\vec{v}\,dt) \cdot (m\dot{\vec{v}}) \quad \leftarrow N2 \qquad (10.1)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v})^2 \qquad (10.2)$$

$$= \frac{m}{2} \left(v_2^2 - v_1^2 \right) \qquad (10.3)$$

= Energieänderung auf Grund der Geschwindigkeitsänderung

Definition:
<u>Kinetische Energie</u>

$$E_K = T = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (10.4)$$

Einheiten:

$$\text{Joule } [J] = kg\, m^2 s^{-2}$$
$$= N \cdot m$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U)_i$$

$$= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \nabla_j \nabla_k U$$

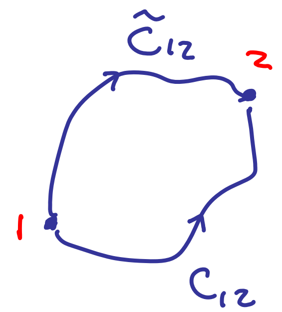
$$= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k U$$

$$= \sum_{jk} \frac{1}{2} \Big(\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k U + \underbrace{\varepsilon_{ikj}}_{-\varepsilon_{ijk}} \partial_k \partial_j U \Big)$$

$$= \sum_{jk} \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \underbrace{(\partial_j \partial_k - \partial_k \partial_j)}_{=0} U$$

Def: Konservatives Kraftfeld

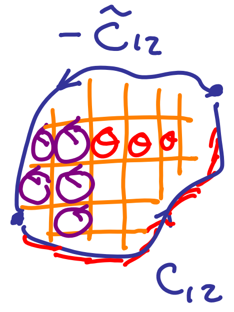
Falls Arbeit zwischen 1 und 2 unabhängig vom Weg ist, wird Kraftfeld konservativ genannt



$$A_{12} \overset{(9.4)}{=} \int_{C_{12}} d\vec r \cdot \vec K_{kons} = \int_{\tilde C_{12}} d\vec r \cdot \vec K_{kons} \qquad (11.1)$$

$$A_{\circlearrowleft} = \int_{C_{12}} d\vec r \cdot \vec K + \int_{-\tilde C_{12}} d\vec r \cdot \vec K = \int_{C_{12}} d\vec r \cdot \vec K - \int_{\tilde C_{12}} d\vec r \cdot \vec K = 0$$

$$0 = \oint d\vec r \cdot \vec K_{kons} \overset{(Stokes)}{=} \int_{Fläche} d\vec A \cdot (\vec\nabla \times \vec K_{kons}) \qquad (11.2)$$



(11.3) gilt für beliebige Fläche,

$$\Longrightarrow \quad \vec\nabla \times \vec K_{kons} = 0 \qquad (11.3)$$

also kann $\vec K_{kons}$ wie folgt geschrieben werden:

$$\boxed{\vec K_{kons} = -\vec\nabla\left(U(\vec r) + U_0\right)} \qquad (11.4)$$

skalares Feld, heißt "Potential", oder "potenzielle Energie"
Nullpunkt beliebig

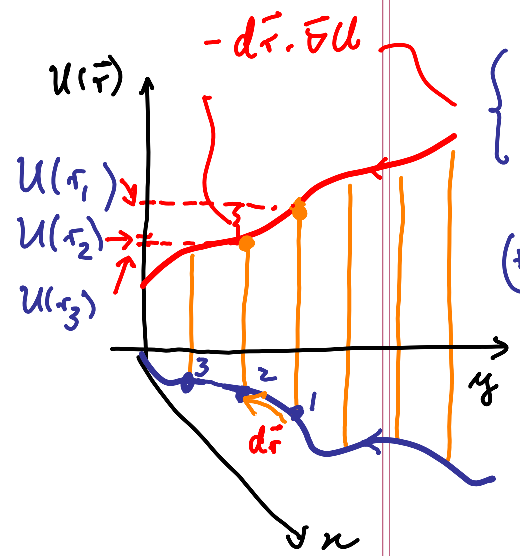
$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$ denn:

$$\vec\nabla \times \vec\nabla U = 0 \qquad (11.5)$$

$$\Big(\underbrace{\varepsilon_{ijk}\,\partial_j}_{\vec\nabla\times}\,\underbrace{\partial_k U}_{\vec\nabla U} = 0\Big)$$

Energieerhaltungssatz:

Integriere (11.4)



$\Big\{$ − Änderung v. U in Richtung v. $d\vec r$
$=$
(+ Änderung v. T)

$$U(r_1) - U(r_2) = \int_1^2 \underbrace{d\vec r \cdot [-\vec\nabla U(\vec r)]}_{-dU} \qquad (12.1)$$

$$\overset{(11.4)}{=} \int_1^2 d\vec r \cdot \vec K(\vec r) \qquad (12.2)$$

$$\overset{(9.4)}{=} A_{1\to 2} \overset{(10.3)}{=} T_2 - T_1 \qquad (12.3)$$

$$\boxed{U_1 + T_1 = U_2 + T_2} \qquad (12.4)$$

Entlang einer Trajektorie (Bahn) in einem konservativem Kraftfeld bleibt die Gesamtenergie E=T+U eines Teilchens erhalten.

Alternative Herleitung:

$$T_2 - T_1 \overset{(10.3)}{=} A_{1\to 2} \overset{(12.3,1)}{=} \int_1^2 d\vec{r} \cdot \left(-\vec{\nabla}\, U(\vec{r}(t))\right) \qquad (13.1)$$

$$d\vec{r} = dt\,\vec{v} = dt\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$= -\int_1 dt\, \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \frac{dU(\vec{r}(t))}{d\vec{r}}}_{\text{Kettenregel}} \qquad (13.2)$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) \qquad (13.3)$$

$$= -\left[U(\vec{r}(t_2)) - U(\vec{r}(t_1))\right] = U_1 - U_2 \qquad (13.4)$$

$$\Rightarrow \quad T_2 + U_2 = T_1 + U_1 \;\checkmark$$

Energieerhaltung gilt nicht für zeitabhängige Potentiale:

Falls $U = U(\vec{r}(t), t)$, gilt (13.2) → (13.3) nicht;

explizite Zeitabhängigkeit,

denn dann: $$\frac{d}{dt} U(\vec{r}(t), t) = \vec{\nabla} U \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \neq 0$$

Grund: externes System ist für zeitänderung des Potentials verantwortlich, und kann Energie zuführen oder abziehen.

Erhaltungssätze heissen "Integrale der Bewegung", weil sie Diff.-Gl. 1. Ordnung sind

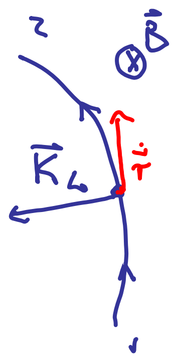
Bewegungsgl. $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}$ ist Diff.Gl. 2.

Erhaltungssätze:
$$\begin{cases} \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + U = E = \text{const} & \text{" 1. Ord} \\ m\dot{\vec{r}} = \vec{p} = \text{const} & \text{" 1. Ord} \\ \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}}) = \vec{L} = \text{const} & \text{" 1. Ord} \end{cases}$$

Bespiel einer kons. Kraft: <u>Lorentzkraft</u>

Kraft auf geladenes Teilchem im Magnetfeld:

$$\vec{K}_{Lorentz} = q\, \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \qquad (14.1)$$



$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$T_2 - T_1 = A_{12} = \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{K}$$

$$d\vec{r} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) dt$$

$$= \int \left(dt\, \dot{\vec{r}}\right) \cdot q\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{B}\right)$$

$$= \int dt\, q\, \vec{B} \cdot \left(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}\right) = 0 \;\checkmark$$

Energie ist erhalten, also ist Kraft konservativ.