DG1

Mathematischer Exkurs: Differentialgleichungen (DG)

Grundverständnis für DG wichtig für kl. Mechanik (u.v.a. ...)

Bsp. f. "gewöhnliche DG": (1)

Höchste Ableitung: = (2)

Beachte: Abl. nach nur einer Variablen. Ansonsten wäre es eine

"partielle DG" (mehrere Variablen): (3)

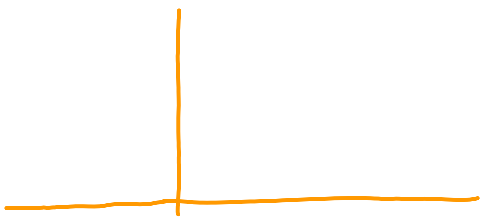
Gesucht: Lsg. der DG für best. Anfangsbedingungen.

$$f(x_0) =$$
$$f'(x_0) =$$
$$f^{(n-1)}(x_0) = \qquad (4)$$

DG2

Qualitativ: DG macht Aussage über Verhältnis einer Funktion zu ihren Ableitungen.

Beispiel 1: $f'(x) = a\, f(x)$



$\Rightarrow$ je grösser Funktion, je

Beispiel 2: $f''(x) = -a\, f(x) \qquad (a>0)$

Fundamentaler Satz über Lsg: DG2

Die allg. Lsg. einer DG n-ter Ordnung hängt von unabh. Parametern ab.

Bemerkung: "unabhängige Parameter" bedeutet:

es existieren keine Funktionen $p_i(c_1, \ldots, c_n)$, $i = 1, \ldots, n-1$ so dass

$$f(x; c_1, \ldots, c_n) = \tag{1}$$

Lsg. der DG

Beispiel: sei $$f(x; c_1, c_2) = \frac{e^{x(c_1+c_2)}}{c_1+c_2} + c_3 \tag{2}$$

dann (3)

$\Longrightarrow$ c_1 und c_2 unabhängig

Unabhängigkeit ist i.d.R. offensichtlich ohne Beweis.

DG3

Mit d. allg. Lsg. lassen sich durch geeignete Wahl v. $c_1, \ldots, c_n$ beliebige Anfangsbedingungen erfüllen.

Wichtige Konsequenz: Lösungen möglich durch geniales Raten, denn: "educated guess"

Eine geratene Lsg. mit n unabhängigen Parametern ist die einer n-ten Ordnung!

Beispiel: $$f'(x) = a\,\frac{f(x)}{x} \qquad (\text{DG mit } n = \quad) \tag{1}$$

Lösung: $$f(x) = \tag{2}$$

Check: $$f'(x) =$$

Systematische Verfahren zur Lösung v. gew. DG

Für manche Klassen v. gew. DG gibt es systematische Lösungswege.

Trennung der Variablen:

Bsp: (dasselbe wie 3.1)

$$f'(x) = a \frac{f(x)}{x} \quad (1)$$

(2)

"Trennung":
f nach links, x nach rechts: (3)

Integriere: (4)

$\Rightarrow$ (5)

$\Rightarrow$ (6)

$\Rightarrow$ (7)

Mehr Beispiele: in der Tutorübung und auf Blatt 0.

Wichtiger Spezialfall: Lineare DG (linear-Kombination von Ableitungen)

"homogene DG": (8)

$$\boxed{f^{(i)}(x) \equiv \frac{d^i f(x)}{dx^i} \equiv \partial_x^i f(x)}$$

x-unabhängig

vorgegebene Funktion

(9)

Satz (sehr wichtig): Für <u>homogene</u> lineare DG gilt das Superpositionsprinzip: falls $f_1(x)$ und $f_2(x)$ Lösungen sind, ist auch eine Lsg.

Beweis: (trivial)
$$\sum_i \gamma_i \, \partial_x^i \big(\qquad \big) = 0 \qquad (1)$$
$$= \qquad (2)$$
□

<u>Lemma</u>: Für inhomogene lin. DG lässt sich die <u>allgemeine</u> Lösung konstruieren, falls die allg. Lösung der homogenen DG, sowie <u>eine</u> spezielle Lsg. der inhomogenen DG bekannt sind.

Allgemeine Lsg: (1)

Beweis: (trivial):
$$\sum_i \gamma_i \, \partial_x^i f = \sum_i \gamma_i \, \partial_x^i f_{inh} + \sum_i \gamma_i \partial_x^i f_{hom} \qquad (2)$$
$$=$$
□

Lösungsansatz für homogene lin. DG:
$$f(x) = \qquad (3)$$

Eingesetzt in (5.8):
$$0 = \sum_i \gamma_i \, \partial_x^i \qquad (4)$$

$\Rightarrow$ (3) ist Lsg. falls $\boxed{\qquad\qquad}$ (5)

Falls Gl.(5) n unterschiedliche Lsg. λ_k $(k = 1, \dots, n)$ besitzt, ist die allg. Lsg. von (5.8):
$$f(x; c_1, \dots, c_n) = \qquad (6)$$
(lin. Unabhängigkeit der c_k ist trivial für λ_k alle unterschiedlich)

Bemerkung: Falls einige λ_k gleich sind, ("Entartung"), ist Sonderbehandlung nötig (hier nicht diskutiert)

Bemerkung: Die Wurzeln λ_l können komplex sein.
Wir suchen aber oft nur reelle Lsg. Diese können als Real- und Imaginärteil der allg. Lösung (6) konstruiert werden.

<u>Verallgemeinerung</u>: System v. (mehreren) DGleichungen für (mehrere) Funktionen:

z.B.

$$f_1'(x) = \qquad (1)$$
$$f_2'(x) =$$

Wichtig: <u>Eine</u> DG n-ter Ordnung lässt sich als n DG-ungen 1-ter Ordnung schreiben.

Beispiel:

$$f''(x) + a\left(f'(x)\right)^2 + b\,f(x) = cx \qquad (1)$$

Definiere: (2)

(3)

(3)' :

2 DG 1-ter Ordnung

(4)

(1) :