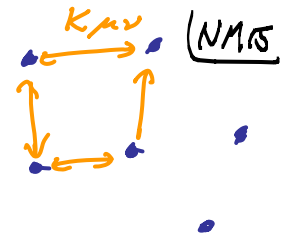


4. System von Massenpunkten

(U2)

19.4.05



$$(N2) \quad m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = \vec{K}_\nu$$

$\nu = 1, \dots, N$

$$\vec{K}_\nu = \vec{K}_\nu^{(a)} +$$

$$\sum_{\mu=1, \dots, N}^{\mu \neq \nu} \vec{K}_{\nu\mu}^{(i)} \quad (15.1)$$

äußeren Kräfte

ausgeübte
"innere" Kraft

Def: Schwerpunkt (SP) $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu \quad (15.2)$

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_\nu m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu \stackrel{(15.1)}{=} \sum_\nu \vec{K}_\nu^{(a)} + \sum_\nu \underbrace{\left(\sum_{\mu \neq \nu} \vec{K}_{\nu\mu} \right)}_{=0 \text{ (N3)}} \quad (15.3)$$

denn $\sum_\nu \sum_{\mu \neq \nu} K_{\mu\nu}$

NM16

vertausche Reihenfolge der Summe

$$\Rightarrow (15.3) \quad M \ddot{\vec{R}} = \sum_\nu \vec{K}_\nu^{(a)} = \vec{K} = \text{gesamte äußere Kraft} \quad (16.1)$$

SP verhält sich so wie ein Partikel mit Masse M, Ortsvektor R, unter Einfluß äußeren Kraft K, unabhängig von inneren Kräften

Es ist oft sinnvoll, SP so zu wählen dass Schwerpunktsimpuls = 0:
dieses Bezugssystem heißt "SP-System"

Def: SP-Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_v \vec{r}_v \times m_v \dot{\vec{r}}_v$$

(17.1) NM17

Def: Externes Drehmoment

$$\vec{M} = \sum_v \vec{r}_v \times \vec{K}_v^{(a)}$$

(17.2)

$$\dot{\vec{L}} \stackrel{(17.1)}{=} \left(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0 \right)$$

(17.3)

=

$$\stackrel{(17.2)}{=} =$$

$$\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{M}}$$

wie (9.2)

(17.4)

Drehimpulserhaltung:

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow$$

(17.5)

Transformation ins SP-System

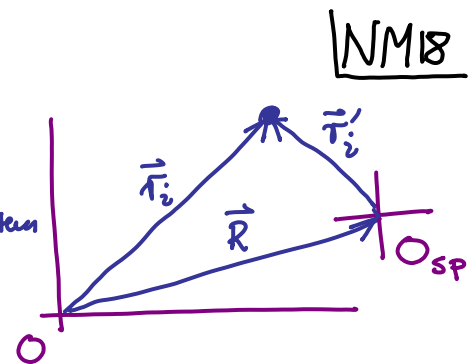
Schreibe

$$\vec{r}_v = \vec{R} + \vec{r}_v'$$

(18.1)

SP- $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ort} \\ \text{Geschw} \end{array} \right\}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ortsvektor} \\ \text{Geschw.} \end{array} \right\}$ im SP-System



NM18

$$\frac{d}{dt} \quad (18.1)$$

$$\vec{v}_v = \vec{v} + \vec{v}'$$

Transformiere ins SP-System:

wähle

(18.2)

(SP-Koorindate im SP-System = 0)

und

(SP ruht im SP-

(18.3)

Gesamtimpuls:

$$\vec{p} = \sum_v m_v \dot{\vec{r}}_v =$$

=

(18.4)

$\Rightarrow$

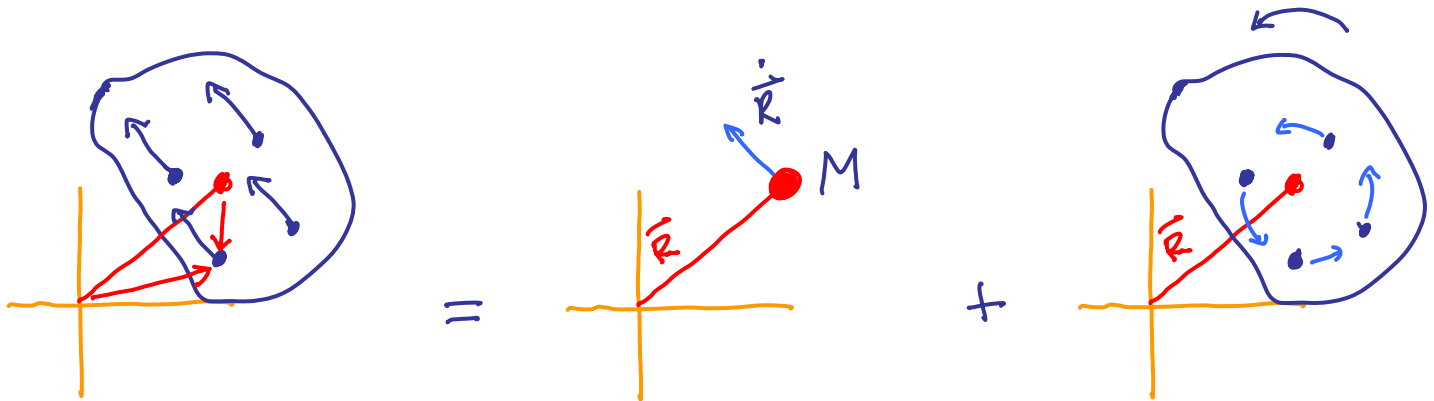
Gesamtimpuls = Schwerpunktimпульс

Gesamtdrehimpuls:

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= \sum_v \vec{r}_v \times m_v \dot{\vec{r}}_v & (19.1) & \quad \boxed{\text{NM19}} \\
 &= \sum_v (\vec{R} + \vec{r}_v') \times m_v (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_v') \\
 &= \quad + \quad + \quad +
 \end{aligned}$$

Gesamtdrehimpuls um O = Dreimpuls (um O) einer Punktmasse M am SP-Ort R,
+ Derimpuls der Teilchen um den SP O' am SP-Ort R

(19.2)



Energie: falls alle Kräfte konservativ sind, kann gezeigt werden, dass:

NM20

(zur Kenntnisnahme)

$$E = T + U^{(a)} + U^{(i)} \quad (20.1)$$

$$T = \sum_v \frac{1}{2} m_v \dot{\vec{r}}_v^2, \quad (20.2)$$

$$U^{(a)} = \sum_v U_v^{(a)}(\vec{r}_v), \quad (20.3)$$

$$\text{mit } \vec{K}_v^{(a)} = -\partial_{\vec{r}_v} U^{(a)}, \quad (20.4)$$

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{v, \mu}^{v \neq \mu} U_{v\mu}(\underbrace{|\vec{r}_v - \vec{r}_\mu|}_{r_{v\mu}}), \quad (20.5)$$

$$\text{mit } \vec{F}_{v\mu}^{(i)} = -\partial_{\vec{r}_{v\mu}} U^{(i)}. \quad (20.6)$$

5. Inertialsysteme, Galilei-Transformation

NM21

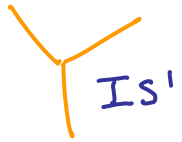
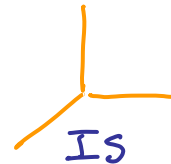
N1 liefert Definition von Inertialsystem (IS)

Relativitätsprinzip von Galilei: alle IS sind gleichwertig (21.1) *sehen gleich aus*

Konkret: N1, N2, N3 sind forminvariant (oder "kovariant") unter Transformation von IS zu IS' (21.2)
"Galilei-Transformation"

Dasselbe Ereignis habe in

$$\begin{cases} \text{IS} & \text{Koordinaten } (x_i, t) \\ \text{IS}' & " (x'_i, t') \end{cases}$$



In IS: $\begin{cases} N_1 \\ N_2 \end{cases} : m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \begin{cases} 0 \\ K_i(\bar{x}, \frac{d\bar{x}}{dt}, t) \end{cases}$ (21.3)

Galilei-Prinzip besagt:

In IS' haben N1, N2 dieselbe Form: $\begin{cases} N_1 \\ N_2 \end{cases}$ (21.4)

(21.3) und (21.4) beschreiben dasselbe physikalische System, aber aus verschiedenen IS betrachtet [also eine "passive Transformation"] NM22

"Galilei-Transf." ist allgemeinste Transf., die diese "Kovarianz" gewährleistet: (22.1)

Drehmatrix

Relativgeschw.

Verschiebung d. Ursprungs
in Raum und Zeit

Check: $\frac{d}{dt'} x'_i(t') =$ (22.1) (22.2)

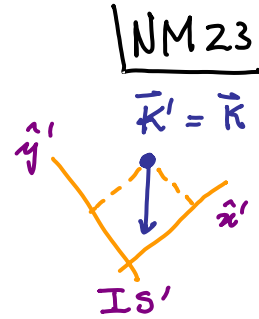
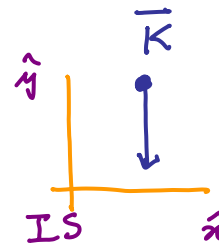
$\begin{cases} N_1 \\ N_2 \end{cases} \frac{d^2}{dt'^2} x'_i(t') =$ (22.3)

Also: N2 ist form-invariant, falls wir ansetzen:

$K'_i(x', \dot{x}', t') = \sum_j A_{ij} K_j(x, \dot{x}, t)$ (22.4)

Galilei-Transf. gewährleistet also Forminvarianz

K_i und K'_i sind im Allgemeinen verschiedene Funktionen ihrer Argumente



Trotzdem:

$$\ddot{\vec{r}} = \sum_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \hat{e}_i \quad \ddot{\vec{r}}' = \sum_i \frac{d^2 x'_i}{dt'^2} \hat{e}'_i \quad (23.1)$$

$$\vec{K} = \sum_i K_i \hat{e}_i \quad \vec{K}' = \sum_i K'_i \hat{e}'_i \quad (23.2)$$

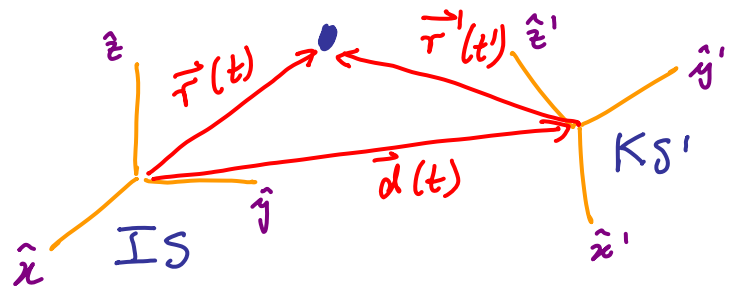
denn dies sind dieselben Vektoren, nur beschrieben in unterschiedlichen Bezugssystemen

6 Beschleunigte Bezugssysteme - Zusammenfassung

NM 24

Linear beschleunigtes BS:

Betrachte "passive" Transf.
(d.h. ein physikalisches System,
zwei Bezugssysteme):



$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{d}(t) \quad (24.1)$$

Beispiel: Sei $\vec{d}(t) = \frac{1}{2} \vec{b} t^2$, $(t' = t)$ (also ist KS' kein IS) (24.2)

Für kräftefreies
Teilchen in IS gilt:

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = 0 \quad (24.3)$$

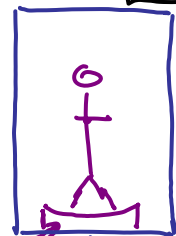
in KS':

$$m \ddot{\vec{r}}'(t) \stackrel{(24.1)}{=} m (\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{d}}) \stackrel{(24.2,3)}{=} -m \vec{b} \quad (24.4)$$

Im beschleunigten BS empfindet Teilchen eine "Trägheitskraft" (TK).

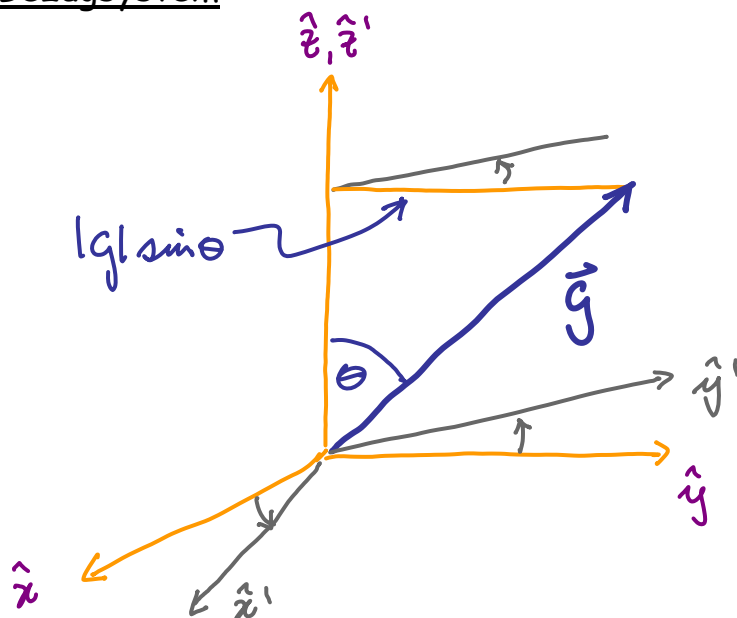
Sie wird auch "Scheinkraft" genannt (weil in IS nicht vorhanden), aber in KS' ist sie sehr reell(!) [z.B. im abwärts anfahrenen Aufzug hebt sie Schwerkraft auf]

NM25



Waage zeigt
Gewicht = 0,
falls: $\vec{a} = -\frac{1}{2} g t^2 \hat{z}$

Rotierendes Bezugssystem



für Skizze: $\hat{z} = \hat{z}'$
(kann immer so gewählt werden)

KS' rotiere relativ zu IS (mit demselben Ursprung),

NM26

mit Winkelgeschw.:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{\omega} \text{ und } \vec{\varphi} \text{ sind} \\ \text{parallel zur Drehachse} \end{array} \right] \quad (26.1)$$

$\vec{G}$ sei zunächst ein mit KS' mitrotierender Vektor, also in KS' zeitunabhängig.
Wie hängt $\vec{G}$ in IS von der Zeit ab?

Änderung v. $\vec{G}$ in IS
wegen Rotation v. KS':

$$(i) \quad |d\vec{G}_r| = \quad (26.2a)$$

$$(ii) \quad d\vec{G}_r \perp \quad (26.2b)$$

$$(iii) \quad d\vec{G}_r \perp \quad (26.2c)$$

$$(26.2) \Rightarrow d\vec{G}_r = \quad (26.3)$$

Betrachte nun beliebigen $\vec{G}(t)$ in KS' , mit Änderung $d\vec{G}_{KS'}$ in dt :

NM27

Gesamtänderung v. G
in IS:

$$\frac{d\vec{G}_{IS}}{dt} =$$

(27.1)

Totale Zeitableitung:



$$\dot{\vec{G}}_{IS} =$$

(27.2)

Beispiele:

(a) Basisvektoren
v. KS' in IS:

$$(\dot{\hat{e}}'_i)_{KS} =$$

(27.3)

(b) Ortsvektor:

$$\vec{r}(t) = \sum_i \underset{\text{raumfest}}{x_i(t)} \hat{e}_i = \sum_i \underset{\text{rotierend}}{x'_i(t)} \hat{e}'_i(t)$$

NM28

(28.1)

(c) Geschwindigkeit:

$$\left(\dot{\vec{r}}(t) \right)_{IS} \stackrel{\text{Produktregel:}}{=} \sum_i \left[\right]$$

(28.2)

=

kurz:

$$\dot{\vec{r}} =$$

(28.3)

[folgt auch direkt aus (27.2)]

(d) Beschleunigung:
für $\vec{\omega} = \text{konst}$
 $\neq \vec{\omega}(t)$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} \stackrel{(28.3)}{=} \frac{d}{dt} \left[\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right]$$

$$\dot{\vec{g}}_{IS} = \dot{\vec{g}}_{KS'} + \vec{\omega} \times \vec{g}_{KS}$$

(28.3)
=

(29.2)

$$= \ddot{\vec{r}}' + 2 \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (29.3)$$

Für kräftefreies
Teilchen in IS

$$m \ddot{\vec{r}} = 0$$

gilt in KS':

$m \ddot{\vec{r}}' =$

(29.4)

"Coriolis-Kraft"

"Zentrifugal-Kraft"

Beispiel: Labor auf der Erde

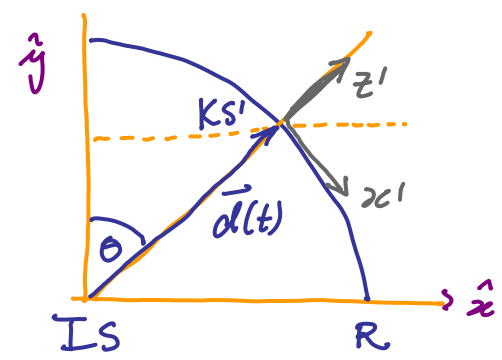
ist ein beschleunigtes BS; nenne wir es KS'

Wegen Erdrotation bewegt sich Labor
(also Ursprung von KS') auf Kreis mit
Radius $R \sin \theta$,
also erfährt es
Beschleunigung:

$$\ddot{\vec{d}} =$$

$$=$$

(30.1)



(30.2)

Labor mitsamt KS' dreht sich einmal um sich selbst (genauer, um eine Achse (parallel zu $\vec{\omega}$ durch Ursprung von KS'), wenn Erde sich einmal um sich selbst dreht.

Winkelgeschw. von KS' ist also:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_z$$

(30.3)

Kombination aller

Trägheitskräfte ergibt:

$$m \ddot{\vec{r}}' = \vec{K}' + m \vec{g}_s - m \ddot{\vec{d}} - 2 m (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

sonstige nicht-
Trägheitskräfte

Schwerkraft
Zentrifugalkraft

(30.4)

[meist vernachlässigbar klein]

Abplattung der Erde

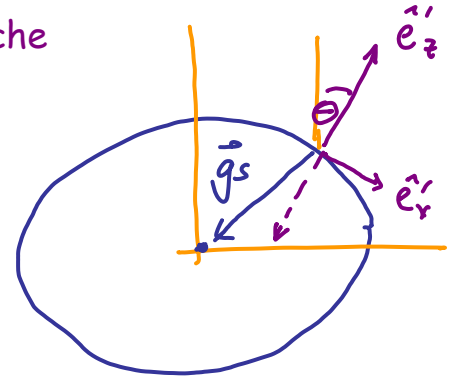
$$\vec{g}_s - \ddot{\vec{r}} \approx -g \hat{e}_z' \quad (31.1)$$

NM31

Gesamtkraft an Oberfläche steht senkrecht zur Oberfläche
(sonst gibt es Restkräfte, die eine Verschiebung von Masse in der Oberfläche bewirken würden)

Also wird Erdkugel etwas abgeplattet.

[Effekt ist klein, sein Einfluss auf anderen Kräfte vernachlässigbar.]



g ist effektive (breitenabhängige) Erdbeschleunigung

$$\omega \hat{e}_z =$$

(30.4), ohne kleinen letzten Term:

$$m \ddot{\vec{r}}' = \vec{K}' - mg \hat{e}_z' - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') \quad (31.2)$$

Wie kreiseln Wirbelstürme?

Für horizontale Bewegung in

Nähe des Erdbodens, mit

$$\dot{z}' \approx 0 \quad \text{gilt:}$$

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = \quad (31.3)$$

$$(31.4)$$

$$= \omega \left[-\omega \sin \theta \dot{y}' \hat{x}' + \omega \sin \theta \dot{x}' \hat{y}' - \dot{y}' \sin \theta \hat{e}_z' \right]$$

$$(31.2)_x:$$

$$m \ddot{x}' = K'_x - 2m$$

$$(32.1) \quad \text{NM32}$$

$$(31.2)_y:$$

$$m \ddot{y}' = K'_y - 2m$$

$$(32.2)$$

Nordhalbkugel:

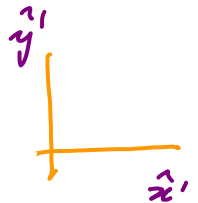
$$\theta < \pi/2, \quad \omega \sin \theta > 0:$$

$$\dot{x}' > 0$$

$$\dot{y}' > 0$$

führt zu Kraft in Richtung

Bewegung wird nach rechts abgelenkt



Südhalbkugel:

$$\theta > \pi/2, \quad \omega \sin \theta < 0:$$

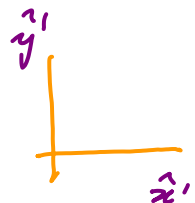
$$\dot{x}' > 0$$

$$\dot{y}' > 0$$

führt zu Kraft in Richtung

Bewegung wird nach links abgelenkt

Also gilt z.B. in der Nordhalbkugel:



Bei einem Hoch $\left(\begin{matrix} \dot{x}', \ddot{y}' \\ \ddot{x}', \dot{y}' \end{matrix} \right)$ drehen Winde im Uhrzeigersinn
(für $x', y' > 0$)

