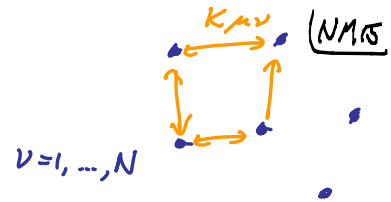


4. System von Massenpunkten

(U2)

$$(N2) \quad m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = \vec{K}_\nu$$



$$\vec{K}_\nu = \underbrace{\vec{K}_\nu^{(a)}}_{\text{äußeren Kräfte}} + \sum_{\mu=1, \dots, N, \mu \neq \nu} \underbrace{\vec{K}_{\nu\mu}^{(i)}}_{\text{von } m_\mu \text{ auf } m_\nu \text{ ausgeübte "innere" Kraft}} \quad (15.1)$$

Def: Schwerpunkt (SP) $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu$ (15.2)

$$\hookrightarrow M = \sum_\nu m_\nu = \text{Gesamtmasse} = 0 \quad (N3)$$

$$M \ddot{\vec{R}} \stackrel{(15.2)}{=} \sum_\nu m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu \stackrel{(15.1)}{=} \sum_\nu \vec{K}_\nu^{(a)} + \sum_\nu \left(\sum_{\mu \neq \nu} \vec{K}_{\nu\mu} \right) \quad (15.3)$$

denn $\sum_\nu \sum_{\mu \neq \nu} \vec{K}_{\mu\nu} \stackrel{v \leftrightarrow \mu}{=} \sum_{\nu \neq \mu} \vec{K}_{\nu\mu} = \sum_{\mu, \nu} \vec{K}_{\nu\mu} \stackrel{N3}{=} \sum_{\mu, \nu} \vec{K}_{\mu\nu} = - \sum_{\mu, \nu} \vec{K}_{\mu\nu}$

$\Rightarrow = 0$

vertausche Reihenfolge der Summe

$$\Rightarrow (15.3) \quad M \ddot{\vec{R}} = \sum_\nu \vec{K}_\nu^{(a)} = \vec{K} = \text{gesamte äußere Kraft} \quad (16.1)$$

SP verhält sich so wie ein Punkteilchen mit Masse M, Ortsvektor R, unter Einfluß äußeren Kraft K, unabhängig von inneren Kräften

Koordinatensystem

Es ist oft sinnvoll, ~~SP~~ so zu wählen dass Schwerpunktsimpuls = 0:
dieses Bezugssystem heißt "SP-System"

Def: Gesamt-drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_v \vec{r}_v \times m_v \dot{\vec{r}}_v \quad (17.1) \quad \boxed{NM17}$$

Def: Externes Dreh-Moment

$$\vec{M} = \sum_v \vec{r}_v \times \vec{K}_v^{(a)} \quad (17.2)$$

$$\dot{\vec{L}} \stackrel{(17.1)}{=} \sum_v \dot{\vec{r}}_v \times m_v \dot{\vec{r}}_v + \underbrace{\vec{r}_v \times m_v \ddot{\vec{r}}_v}_{\vec{K}} \quad (17.3)$$

$$= \sum_v \vec{r}_v \times \vec{K}^{(a)} + \sum_v \sum_{\mu \neq v} \vec{r}_v \times \vec{K}_{v\mu}^{(i)}$$

$$\stackrel{(17.2)}{=} \vec{M}$$

$$\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{M}} \quad \text{Wie (9.2)}$$

Wie (9.2)

$$(17.4)$$

$$= \sum_{(v, \mu \neq v)} \vec{r}_\mu \times \underbrace{\vec{K}_{\mu v}^{(i)}}_{-\vec{K}_{v\mu}^{(i)}} \stackrel{(17.5)}{=} \frac{1}{2} \sum_{v, \mu \neq v} \frac{1}{2} (\vec{r}_v - \vec{r}_\mu) \times \vec{K}_{v\mu} = 0$$

Drehimpulserhaltung:

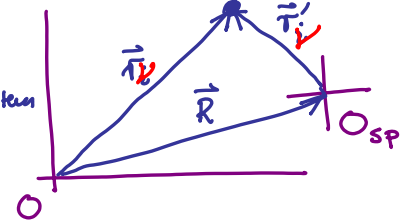
$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.} \quad (17.5)$$

Transformation ins SP-System

Schreibe

$$\vec{r}_v \equiv \vec{R} + \vec{r}_v' \quad \text{SP-} \begin{cases} \text{Ort} \\ \text{Geschw.} \end{cases} \quad \text{Ortsvektor} \quad \text{Geschw.} \quad \text{im SP-System}$$

$$(18.1)$$



$$\frac{d}{dt} \quad (18.1)$$

$$\vec{v}_v = \vec{v} + \vec{v}'$$

Transformiere ins SP-System:

$$\text{wähle } O_{SP} \text{ so, daß } \vec{R}' = \sum_v m_v \vec{r}_v' \equiv 0 \quad (18.2)$$

(SP-Koordinate im SP-System = 0)

$$\text{und } \dot{\vec{R}}' = \sum_v m_v \dot{\vec{r}}_v' = 0 \quad (\text{SP ruht im SP-System}) \quad (18.3)$$

Gesamtimpuls:

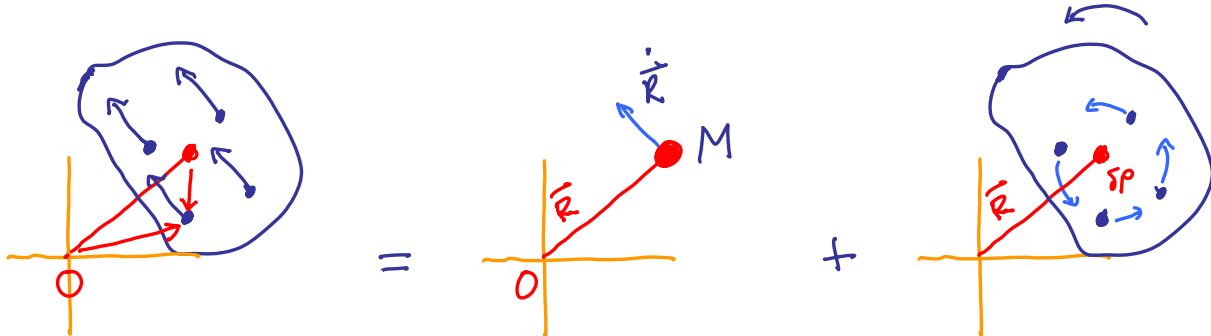
$$\begin{aligned} \vec{P} &= \sum_v m_v \dot{\vec{r}}_v \stackrel{(18.1)}{=} \sum_v m_v (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_v') \\ &= M \dot{\vec{R}} + 0 \quad \swarrow (18.3) \end{aligned} \quad (18.4)$$

$\Rightarrow$ Gesamtimpuls = Schwerpunktimpuls

Gesamtdrehimpuls:

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &\stackrel{(17.1)}{=} \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times m_{\nu} \dot{\vec{r}}_{\nu} & (19.1) \quad \text{NM19} \\
 &\stackrel{(18.1)}{=} \sum_{\nu} (\vec{R} + \vec{r}'_{\nu}) \times m_{\nu} (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_{\nu}) \\
 &\stackrel{(18.2)}{=} \underbrace{\vec{R} \times M \dot{\vec{R}}}_{(18.2)} + \underbrace{0}_{(18.2)} + \underbrace{0}_{(18.3)} + \sum_{\nu} \vec{r}'_{\nu} \times m_{\nu} \dot{\vec{r}}'_{\nu} & (19.2)
 \end{aligned}$$

Gesamtdrehimpuls um O = Drehimpuls (um O) einer Punktmasse M am SP-Ort R
 + Drehimpuls der Teilchen um den SP O' am SP-Ort R



Energie: falls alle Kräfte konservativ sind, kann gezeigt werden, dass:

NM20

(zur Kenntnisnahme)

$$E = T + U^{(a)} + U^{(i)} \quad (20.1)$$

$$T = \sum_{\nu} \frac{1}{2} m_{\nu} \dot{\vec{r}}_{\nu}^2, \quad (20.2)$$

$$U^{(a)} = \sum_{\nu} U_{\nu}^{(a)}(\vec{r}_{\nu}), \quad (20.3)$$

$$\text{mit } \vec{K}_{\nu}^{(a)} = -\partial_{\vec{r}_{\nu}} U^{(a)}, \quad (20.4)$$

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu}^{\nu \neq \mu} U_{\nu\mu} \underbrace{(|\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}|)}_{r_{\nu\mu}}, \quad (20.5)$$

$$\text{mit } \vec{F}_{\nu\mu}^{(i)} = -\partial_{\vec{r}_{\nu\mu}} U^{(i)}. \quad (20.6)$$

5. Inertialsysteme, Galilei-Transformation

NM21

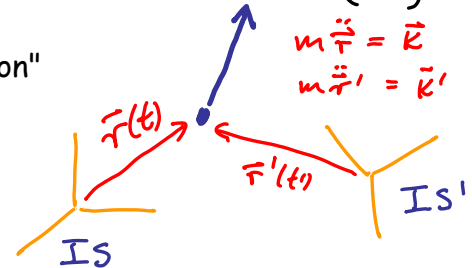
N1 liefert Definition von Inertialsystem (IS)

Relativitätsprinzip von Galilei: alle IS sind gleichwertig (21.1) *sehen gleich aus*

Konkret: N1, N2, N3 sind forminvariant (oder "kovariant") unter Transformation von IS zu IS' (21.2)
"Galilei-Transformation"

Dasselbe Ereignis habe in

$$\begin{cases} \text{IS} & \text{Koordinaten } (x_i, t) \\ \text{IS}' & " (x'_i, t') \end{cases}$$



In IS:
$$\left. \begin{matrix} N1 \\ N2 \end{matrix} \right\} : m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \begin{cases} 0 \\ K_i(\bar{x}, \frac{d\bar{x}}{dt}, t) \end{cases} \quad (21.3)$$

Galilei-Prinzip besagt:

In IS' haben N1, N2 dieselbe Form:
$$\left. \begin{matrix} N1 \\ N2 \end{matrix} \right\} m \frac{d^2 x'_i}{dt'^2} = \begin{cases} 0 \\ K'_i(\bar{x}', \frac{d\bar{x}'}{dt'}, t') \end{cases} \quad (21.4)$$

(21.3) und (21.4) beschreiben dasselbe physikalische System, aber aus verschiedenen IS betrachtet [also eine "passive Transformation"] NM22

"Galilei-Transf." ist allgemeinste Transf., die diese "Kovarianz" gewährleistet: (22.1)

$$x'_i = \sum_j A_{ij} x_j - v_i t - x'_0 ; \quad t' = t - t_0$$

Drehmatrix $\hat{n}_k = (n_x, n_y, n_z) = n_x \hat{e}_x + n_y \hat{e}_y + n_z \hat{e}_z$ *Relativgeschw.* *Verschiebung d. Ursprungs in Raum und Zeit*
sind t-unabhängig

Check:
$$\frac{d}{dt'} x'_i(t') = \sum_j A_{ij} \frac{d}{dt} x_j(t) - v_i + 0 \quad (22.2)$$

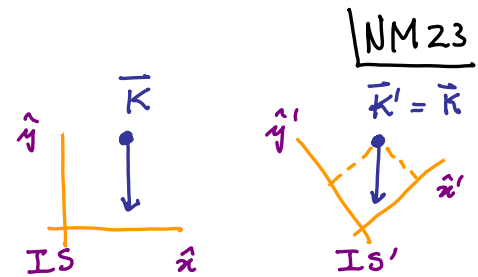
$$\left. \begin{matrix} N1 \\ N2 \end{matrix} \right\} m_i \frac{d^2}{dt'^2} x'_i(t') = \sum_j A_{ij} \frac{d^2}{dt^2} x_j + 0 = \begin{cases} 0 \\ \sum_j A_{ij} K_j(x, \dot{x}, t) \end{cases} \equiv \begin{cases} 0 \\ K'_i(x', \dot{x}', t') \end{cases} \quad (22.3)$$

Also: N2 ist form-invariant, falls wir ansetzen:

$$K'_i(x', \dot{x}', t') = \sum_j A_{ij} K_j(x, \dot{x}, t) \quad (22.4)$$

Galilei-Transf. gewährleistet also Forminvarianz

K_i und K'_i sind im Allgemeinen verschiedene Funktionen ihrer Argumente



Trotzdem:

$$\ddot{\vec{r}} = \sum_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \hat{e}_i = \ddot{\vec{r}}' = \sum_i \frac{d^2 x'_i}{dt'^2} \hat{e}'_i \quad (23.1)$$

$$\vec{K} = \sum_i K_i \hat{e}_i = \vec{K}' = \sum_i K'_i \hat{e}'_i \quad (23.2)$$

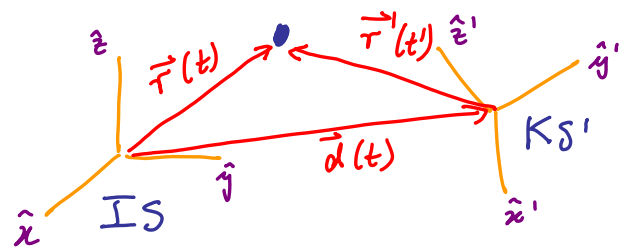
denn dies sind dieselben Vektoren, nur beschrieben in unterschiedlichen Bezugssystemen

6 Beschleunigte Bezugssysteme - Zusammenfassung

NM 24

Linear beschleunigtes BS:

Betrachte "passive" Transf.
(d.h. ein physikalisches System,
zwei Bezugssysteme):



$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{d}(t) \quad (24.1)$$

Beispiel: Sei $\vec{d}(t) = \frac{1}{2} \vec{b} t^2$, ($t' = t$) (also ist KS' kein IS) (24.2)

Für kräftefreies
Teilchen in IS gilt:

$$m \ddot{\vec{r}}(t) = 0 \quad (24.3)$$

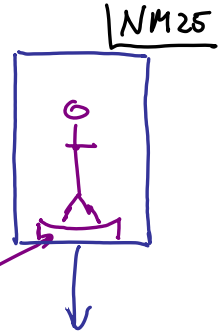
in KS':

$$m \ddot{\vec{r}}'(t) \stackrel{(24.1)}{=} m (\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{d}}) \stackrel{(24.2,3)}{=} -m \vec{b} \quad (24.4)$$

$\neq 0$

Im beschleunigten BS empfindet Teilchen eine "Trägheitskraft" (TK).

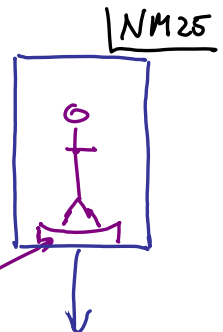
Sie wird auch "Scheinkraft" genannt (weil in IS nicht vorhanden), aber in KS' ist sie sehr reell(!) [z.B. im abwärts anfahren den Aufzug hebt sie Schwerkraft auf]



Waage zeigt
Gewicht = 0,
falls: $\vec{a} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{z}$

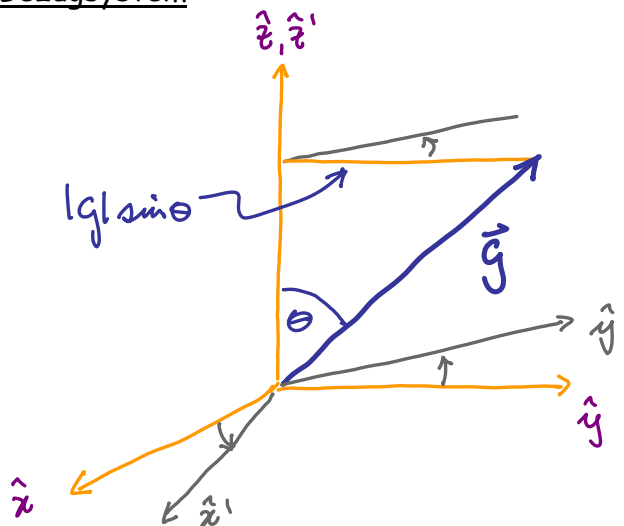
Im beschleunigten BS empfindet Teilchen eine "Trägheitskraft" (TK).

Sie wird auch "Scheinkraft" genannt (weil in IS nicht vorhanden), aber in KS' ist sie sehr reell(!) [z.B. im abwärts anfahren den Aufzug hebt sie Schwerkraft auf]



Waage zeigt
Gewicht = 0,
falls: $\vec{a} = -\frac{1}{2}gt^2\hat{z}$

Rotierendes Bezugssystem



für Skizze: $\hat{z} = \hat{z}'$
(kann immer so gewählt werden)

KS' rotiere relativ zu IS (mit demselben Ursprung),

NM26

mit Winkelgeschw.: $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ $\left[\begin{array}{l} \vec{\omega} \text{ und } \vec{\varphi} \text{ sind} \\ \text{parallel zur Drehachse} \end{array} \right]$ (26.1)

$\vec{G}$ sei zunächst ein mit KS' mitrotierender Vektor, also in KS' zeitunabhängig.
Wie hängt $\vec{G}$ in IS von der Zeit ab?

Änderung v. G in IS
wegen Rotation v. KS':

(i) $|d\vec{g}_r| =$ (26.2a)

(ii) $d\vec{g}_r \perp$ (26.2b)

(iii) $d\vec{g}_r \perp$ (26.2c)

(26.2) $\Rightarrow d\vec{g}_r =$ (26.3)

Betrachte nun beliebigen $\vec{G}(t)$ in KS', mit Änderung $d\vec{g}_{KS'}$ in dt:

NM27

Gesamtänderung v. G
in IS:

$\frac{d\vec{g}_{IS}}{dt} =$ (27.1)

Totale Zeitableitung:

$\dot{\vec{g}}_{IS} =$

(27.2)

Beispiele:

(a) Basisvektoren
v. KS' in IS:

$(\dot{\hat{e}}'_i)_{KS} =$

(27.3)

(b) Ortsvektor: $\vec{r}(t) = \sum_i x_i(t) \hat{e}_i = \sum_i x'_i(t) \hat{e}'_i(t)$ | NM 28
(28.1)

raumfest rotierend

(c) Geschwindigkeit: $\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{IS} = \sum_i \left[\begin{array}{c} \text{Produktregel:} \\ \dot{x}_i(t) \hat{e}_i + x_i(t) \dot{\hat{e}}_i \end{array} \right]$ (28.2)

=

kurz: $\dot{\vec{r}} =$ (28.3)

[folgt auch direkt aus (27.2)]

(d) Beschleunigung: $\ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} \stackrel{(28.3)}{=} \frac{d}{dt} \left[\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right]$ | NM 29
(29.1)

für $\vec{\omega} = \text{konst}$
 $\neq \vec{\omega}(t)$

$\dot{\vec{g}}_{IS} = \dot{\vec{g}}_{KS'} + \vec{\omega} \times \vec{g}_{KS}$ (29.2)

(28.3)
=

$= \ddot{\vec{r}}' + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (29.3)$

Für kräftefreies
Teilchen in IS

$m \ddot{\vec{r}} = 0$

gilt in KS':

$m \ddot{\vec{r}}' =$

(29.4)

"Coriolis-Kraft"

"Zentrifugal-Kraft"

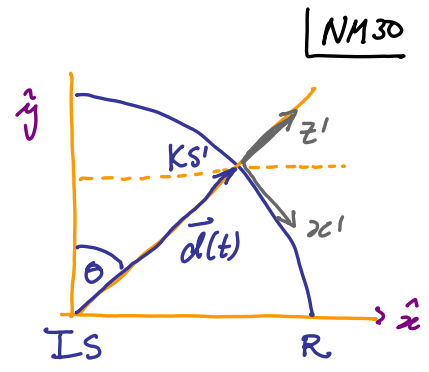
Beispiel: Labor auf der Erde

ist ein beschleunigtes BS; nenne wir es KS'

Wegen Erdrotation bewegt sich Labor
(also Ursprung von KS') auf Kreis mit
Radius $R \sin \theta$,
also erfährt es
Beschleunigung:

$$\ddot{\vec{d}} =$$

(30.1)



(30.2)

Labor mitsamt KS' dreht sich einmal um sich selbst (genauer, um eine Achse (parallel zu $\vec{\omega}$ durch Ursprung von KS'), wenn Erde sich einmal um sich selbst dreht.

Winkelgeschw. von KS' ist also:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_z$$

(30.3)

Kombination aller

Trägheitskräfte ergibt:

$$m \ddot{\vec{r}}' = \vec{K}' + m \vec{g}_s - m \ddot{\vec{d}} - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (30.4)$$

sonstige nicht-
Trägheitskräfte

Schwerkraft
Zentrifugalkraft

[meist vernachlässigbar klein]

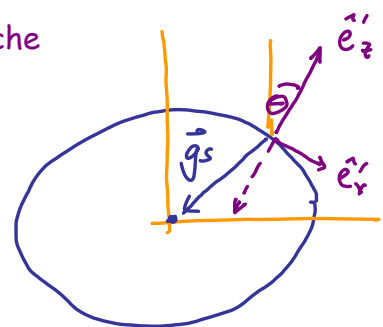
Abplattung der Erde

$$\vec{g}_s - \ddot{\vec{d}} \approx -g \hat{e}_z' \quad (31.1)$$

Gesamtkraft an Oberfläche steht senkrecht zur Oberfläche
(sonst gibt es Restkräfte, die eine Verschiebung von
Masse in der Oberfläche bewirken würden)

Also wird Erdkugel etwas abgeplattet.

[Effekt ist klein, sein Einfluss auf
anderen Kräfte vernachlässigbar.]



g ist effektive (breitenabhängige) Erdbeschleunigung

$$\omega \hat{e}_z =$$

$$(30.4), \text{ ohne kleinen letzten Term: } m \ddot{\vec{r}}' = \vec{K}' - mg \hat{e}_z' - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') \quad (31.2)$$

Wie kreiseln Wirbelstürme?

Für horizontale Bewegung in

Nähe des Erdbodens, mit

$$\dot{z}' \approx 0 \quad \text{gilt:}$$

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = \quad (31.3)$$

(31.4)

$$= \omega \left[-\omega \theta \dot{y}' \hat{x}' + \omega \theta \dot{x}' \hat{y}' - \dot{y}' \sin \theta \hat{e}_z' \right]$$

$$(3.2)_x :$$

$$(3.2)_y :$$

$$m\ddot{x}' = K'_x - 2m$$

$$m\ddot{y}' = K'_y - 2m$$

$$(3.2.1) \quad \underline{NM32}$$

$$(3.2.2)$$

Nordhalbkugel:

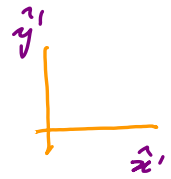
$$\theta < \pi/2, \quad \omega\theta > 0:$$

$$\dot{x}' > 0$$

$$\dot{y}' > 0$$

führt zu Kraft in Richtung

Bewegung wird nach rechts abgelenkt



Südhalbkugel:

$$\theta > \pi/2, \quad \omega\theta < 0:$$

$$\dot{x}' > 0$$

$$\dot{y}' > 0$$

führt zu Kraft in Richtung

Bewegung wird nach links abgelenkt

Also gilt z.B. in der Nordhalbkugel:

Bei einem Hoch $\left(\begin{matrix} \dot{x}', \dot{y}' \\ \dot{x}', \dot{y}' \end{matrix} \right)$ drehen Winde im Uhrzeigersinn
(für $x', y' > 0$)

