Erhaltungssätze (zum Ersten) [nach S. Kehrein] 25.4.07 ES1

Def: "Abgeschlossenes System": hat keine Wechselwirkung mit Massenpunkten ausserhalb des Systems.

Betrachte abg. S. aus N Massenpunkten, beschrieben durch Pot.

Kraft auf Massenpunkt ν

in Richtung (1)

Bsp: Gravitationspot. für N Körper: $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) =$ (2)

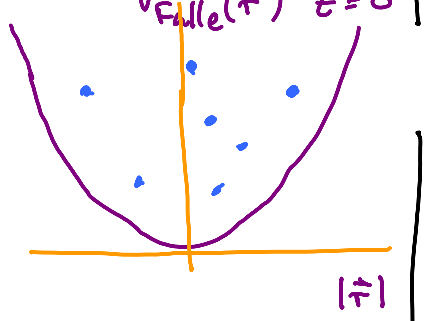
keine Doppelzählung!

= Summe aus "Zweikörperpotentialen"

ES2

Satz: Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ beschrieben. Falls V nicht explizit von der Zeit abhängt ("V invariant unter Zeitverschiebungen" "Homogenität der Zeit"), ist Gesamtenergie zeitlich konstant.

Bemerkung: "Homogenität der Zeit" bedeutet: keine "absolute" Zeit ist ausgezeichnet. z.B: 2 Beobachter in unterschiedl. Inertialsystemen mit verschiedenem Zeitursprung sehen die gleichen Naturgesetze.



Gegenbeispiel: Atome in optischer Falle,

mit $V = V_{Falle}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \quad) + \sum_{\nu<\mu} V_{int}(\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu)$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{2} k \, \vec{r}_\nu^{\,2}$$

ES3

Beweis: Gesamtenergie: $E \overset{def}{=} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} (\dot{\vec{r}}_\nu)^2 + V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ (1)

$\partial_t(1)$: $\frac{dE}{dt} =$ (2)

$= \sum_{\nu=1}^{N} \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \Big(\qquad \Big)$ (3)

ES4

Satz: Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ beschrieben. Falls V invariant unter Verschiebungen um beliebigen Vektor $\vec{a}$ ist,

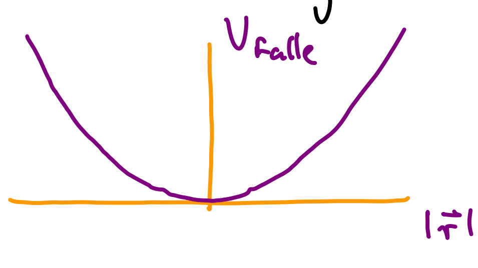
$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) =$ (1)

(Homogenität des Raums), ist Gesamtimpuls zeitlich konstant:

(2)

Bemerkung (i): Homogenität des Raums: kein Punkt im Raum ist ausgezeichnet.

Gegenbeispiel: Atome in optischer Falle:



Bemerkung (ii): Bedingung für 2-Teilchen WW, dass Pot. nur von Ortsdifferenzen abhängt, z.B. Grav. Pot.:

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \tag{1}$$

ES5

Beweis:

(4.1) : $V(\vec{r}_1 + \vec{a}, \ldots, \vec{r}_N + \vec{a}) = V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$ (2)

$=$ (3)

$\Rightarrow \quad 0 = \quad =$ $\boxed{}$

Gesamtimpuls: (4)

Folgerung: Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems mit Eigenschaft (4.1) bewegt sich gleichförmig, mit Geschw. $\vec{P}/M$, wobei $M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$ = Gesamtmasse.

ES6

Beweis: Schwerpunkt $\vec{R}(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu$ (1)

$\overset{\cdot}{(1)}$

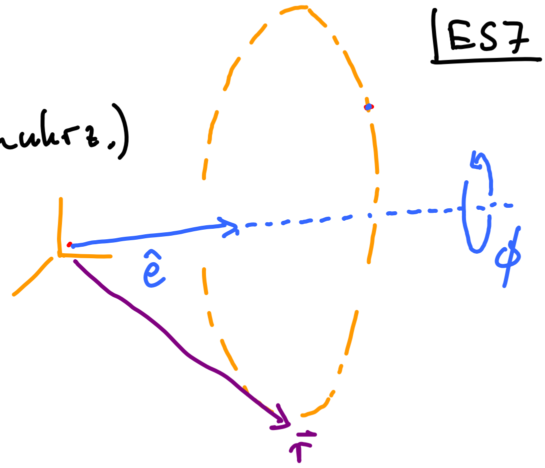
Nächster Schritt: Konsequenz der Isotropie des Raums?

Vorher ...

ES7

Mathematischer Exkurs über Drehungen

Drehe den Vektor $\vec r$ um einen Winkel ϕ (gegenuhrz.) parallel zu einer Achse $\hat e$, mit $|\hat e| = 1$.
In welchen Vektor $\vec r\,'$ geht $\vec r$ über?
(Sog. aktive Transf.)

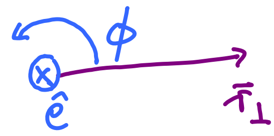


Zerlege $\vec r$ bezüglich $\hat e$: $\qquad \vec r = \vec r_\parallel + \vec r_\perp \qquad (1)$

Siehe Blatt 0, Einstiegsaufgabe 1 $\} \rightarrow \qquad = \qquad (2)$

Schreibe: $\qquad \vec r_\perp = \qquad (3)$

mit $\qquad \vec s = \qquad (4)$



$\vec r_\perp\,' = \qquad (5)$

Rotierter Vektor: $\qquad \vec r\,' = \vec r_\parallel + \vec r_\perp\,' \overset{(5)}{=} \qquad (6)$

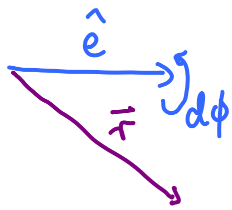
ES8

$$\vec r\,' \overset{(2)}{=} \hat e(\hat e\cdot\vec r) - \underbrace{\hat e\times\vec s}_{\overset{(2)}{=}\ \vec r - \hat e(\hat e\cdot\vec r)}\cos\phi + \hat e\times\vec r\,\sin\phi \qquad (1)$$

$$\boxed{\vec r\,' = \vec r\cos\phi + (1-\cos\phi)\,\hat e(\hat e\cdot\vec r) + \hat e\times\vec r\,\sin\phi} \qquad (2)$$

Infinitesimale Drehung um $d\phi$: $\qquad \boxed{\vec r\,' = \qquad\qquad} \qquad (3)$

Ende math. Exkurs. //



Def: Drehimpuls eines Teilchens bezüglich Ursprung: $\vec{L} \overset{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p}$ (1)

Def: Drehmoment, das auf Teilchen wirkt: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (2)

Satz: Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ beschrieben. Falls V invariant unter Drehungen um den Ursprung ist,

gleiche Transf. (8.2) für alle N Vektoren

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \qquad (3)$$

("Isotropie des Raumes"), dann ist Gesamtdrehimpuls bezüglich des Ursprungs, $\vec{L} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu$, zeitlich erhalten.

Bem: Verallg. für Drehung um anderen Punkt ist offensichtlich.

Beweis: Betrachte inf. Drehung $d\phi$ um Einheitsvektor $\hat{e}$:

(8.3) $$\vec{r}\,' = \vec{r} + \hat{e} \times \vec{r}\, d\phi \qquad (1)$$

(9.3): $$V(\vec{r}\,'_1, \dots \vec{r}\,'_N) = \qquad V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \qquad (2)$$

$$= \qquad (3)$$

$$= \qquad = \qquad (4)$$

$\hat{e}$ ist beliebig $\Rightarrow$ $0 \overset{(4)}{=}$ ← Gesamtdrehmoment verschwindet (5)

Folglich: (9.1)

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \times \vec{p}_\nu + \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \dot{\vec{p}}_\nu \qquad (1)$$

$$= \qquad \square \qquad (2)$$

Folgerung: Isotrope 2-Teilchenpotentiale können nur vom Abstand abhängen.

Bsp: Grav. Pot.: $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \propto \dfrac{1}{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}$ (3)

Def: Eine "Zentralkraft" wirkt immer in Richtung der Verbindungsgerade zweier Massenpunkte.

Folgerung: Für Zentralkräfte gilt Drehimpulserhaltung: (4)

$$\vec{M} =$$

Bem (i): Isotrope 2-Teilchenpotentiale führen zu Zentralkräften, denn $V(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)$

$\Rightarrow$ Kraft: $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r}) =$ (1)

(2)

$$\left.\begin{aligned} r &= \left[r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right]^{1/2} \\ \frac{\partial r}{\partial r_1} &= \frac{r_1}{\left[r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right]^{1/2}} \\ &= \frac{r_1}{r} \end{aligned}\right] \quad = \qquad = \qquad \left[\hat{r} = \frac{r_i \hat{e}_i}{r}\right]$$

Bem ii): Es gibt auch (z.B.) isotrope 3-Körperkräfte, die keine Zentralkräfte sind. Auch für diese gilt, wie gezeigt, Drehimpulserhaltung!

Zentrales Thema der modernen Theoretischen Physik: $\boxed{}$

Mathematischer Exkurs: Dreidimensionale Drehgruppe

Def: Drehmatrix: R sei eine reelle, orthogonale Matrix, d.h.

transponiert → $R^T R = 1 \quad (\to R R^T = 1)$ (1) $\left[(R^T)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} R_{ji} \right.$

Def: "Rotation": $r_i' =$

(2)

Unter (2) bleiben Längen erhalten!

Beweis: $(r')^2 = \sum_i r_i' \, r_i' =$ (3)

$= \sum_{ijk} \qquad R_{ik} \, r_k$

$=$ (4)

Bem: Da $\vec{r}\,'^2 = \vec{r}^{\,2}$, stellt R eine Drehung dar!

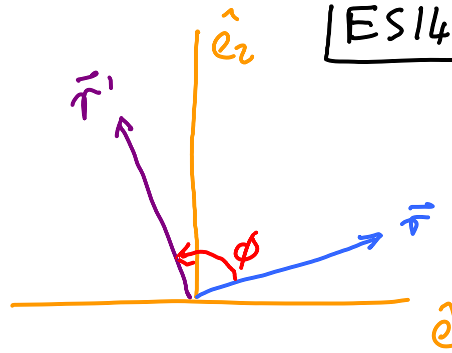
Beispiel in 2 Dim:

$r_1' = \cos\phi \, r_1 - \sin\phi \, r_2$ (1a)

$r_2' = \sin\phi \, r_1 + \cos\phi \, r_2$ (1b)

$\begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$

(2)



In 3D:

Def: $\det R = \quad$: "reine Drehung", $R \in \underbrace{SO(3)}$

Name für Drehgruppe.

$\det R = \quad$: Drehung + Raumspiegelung

Jede SO(3)-Rotation läßt sich durch Hintereinanderausführen von Drehungen um die drei Koordinatenachsen aufbauen:

ES15

Drehung um z-Achse (gegen Uhrzeigersinn):

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Drehung um x-Achse (gegen Uhrzeigersinn):

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad (2)$$

Drehung um y-Achse (gegen Uhrzeigersinn):

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix} \quad (3)$$

Zusätzliches Element für O(3):

Raumspiegelung: $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

E16

SU(3) ist damit eine 3-parametrige Gruppe.

Einschub: "Gruppenaxiome": Mitglieder einer "Gruppe" $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ haben folgende Eigenschaften:

1) Verknüpfungsoperation: Falls g_1 und $g_2 \in G$, dann $\in G$

2) Assoziativ: $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) =$

3) Einheitselement: Es existiert $e \in G$, sodaß $\forall g \in G$

4) Inverse: $\forall g \in G$ existiert $g^{-1} \in G$, so dass

Rotationen $R \in SO(3)$ erfüllen alle diese Axiome. Bsp:

Sei $R_1, R_2 \in SO(3)$, und $M = R_1 \cdot R_2$, dann