Erhaltungssätze (zum Ersten) [nach S. Kehrein] 26.4.07 ES1

Def: "Abgeschlossenes System": hat keine Wechselwirkung mit Massenpunkten ausserhalb des Systems.

Betrachte abg. S. aus N Massenpunkten, beschrieben durch Pot. $V(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N, t)$

Kraft auf Massenpunkt ν in Richtung $i = 1,2,3 = x,y,z$

$$F_{\nu i} = -\frac{\partial V}{\partial r_{\nu i}} = -\partial_{\nu i} V \qquad (1)$$

Bsp: Gravitationspot. für N Körper:

$$V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = -G \sum_{\nu<\mu} \frac{m_\nu m_\mu}{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|} \qquad (2)$$

keine Doppelzählung!

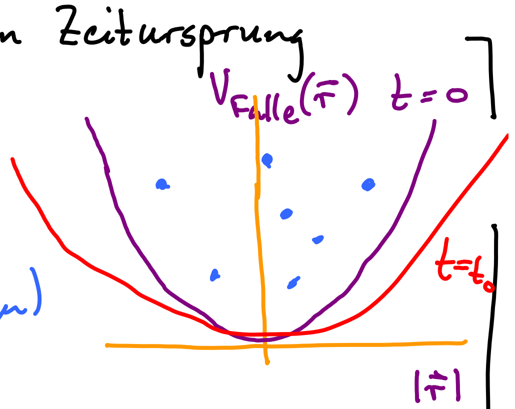
= Summe aus "Zweikörperpotentialen"

ES2

Satz: Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$ beschrieben. Falls V nicht explizit von der Zeit abhängt (" V invariant unter Zeitverschiebungen" $t \to t + t_0$ "Homogenität der Zeit"), ist Gesamtenergie zeitlich konstant.

nicht: $V = V(\ldots, t)$

Bemerkung: "Homogenität der Zeit" bedeutet: keine "absolute" Zeit ist ausgezeichnet. z.B: 2 Beobachter in unterschiedl. Inertialsystemen mit verschiedenem Zeitursprung sehen die gleichen Naturgesetze.



Gegenbeispiel: Atome in optischer Falle, mit

$$V = V_{Falle}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) + \sum_{\nu<\mu} V_{int}(\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{2} k(t)\, \vec{r}_\nu^{\,2}$$

ES3

Beweis: Gesamtenergie: $E \overset{def}{=} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} (\dot{\vec{r}}_\nu)^2 + V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ (1)

$\partial_t(1)$: $$\frac{dE}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \ddot{\vec{r}}_\nu + \overbrace{\sum_{\nu=1}^{N} \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial r_{\nu i}} \frac{d r_{\nu i}}{dt}}_{\underbrace{\vec{\nabla}_\nu V}_{\overset{(1)}{=} -\vec{F}_\nu} \cdot \dot{\vec{r}}_\nu}}^{\text{Kettenr.}} \qquad (2)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \left(m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu - \vec{F}_\nu \right) \overset{(N2)}{=} 0 \quad ✓ \qquad (3)$$

$\Rightarrow$ E = zeitlich konstant

Falls $V = V(\dots, t)$, dann Zusatzterm $\sim \frac{\partial}{\partial t} V(\dots, t)$

ES4

Satz: Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ beschrieben. Falls V invariant unter Verschiebungen um beliebigen Vektor $\vec{a}$ ist,

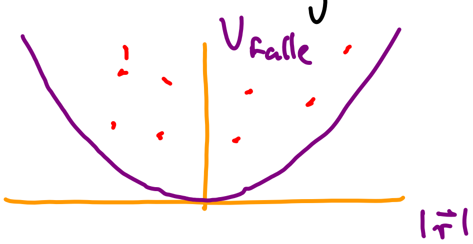
$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = V(\vec{r}_1 + \vec{a}, \dots, \vec{r}_N + \vec{a}) \qquad (1)$$

(Homogenität des Raums), ist Gesamtimpuls zeitlich konstant:

$$\vec{P} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{p}_\nu = \text{konst.} \qquad (2)$$

Bemerkung (i): Homogenität des Raums: kein Punkt im Raum ist ausgezeichnet.

Gegenbeispiel: Atome in optischer Falle:



ES5

Bemerkung (ii): Bedingung für 2-Teilchen WW, dass Pot. nur von Ortsdifferenzen abhängt, z.B. Grav. Pot.:

$$-G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} = V(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = V(\vec{r}_1-\vec{r}_2) = V(\vec{r}_1+\cancel{\vec{a}}-(\vec{r}_2+\cancel{\vec{a}})) \tag{1}$$

Beweis:

∂_{a_i} (4.1):

$$\partial_{a_i} V(\vec{r}_1+\vec{a}, \dots, \vec{r}_N+\vec{a}) = \partial_{a_i} V(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N) = 0 \tag{2}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N}\sum_{j=1}^{3} \underbrace{\frac{\partial V}{\partial r_{\nu j}}}_{-F_{\nu j}} \underbrace{\frac{\partial(r_{\nu j}+a_j)}{\partial a_i}}_{\delta_{ij}} = \sum_{\nu=1}^{N} -F_{\nu i} \tag{3}$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial a_j} = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu} \overset{(N2)}{=} \frac{d}{dt}\underbrace{\sum_{\nu=1}^{N}\vec{p}_{\nu}}_{\text{Gesamtimpuls: } \overset{(4.2)}{=} \vec{P}} \qquad \boxed{\vec{P} = \text{konst.}} \tag{4}$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial r_j} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{ij}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{wenn } i=j \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

Folgerung: Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems mit Eigenschaft (4.1) bewegt sich gleichförmig, mit Geschw. $\vec{P}/M$, wobei $M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$ = Gesamtmasse.

Beweis: Schwerpunkt $\quad \vec{R}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu \qquad (1)$

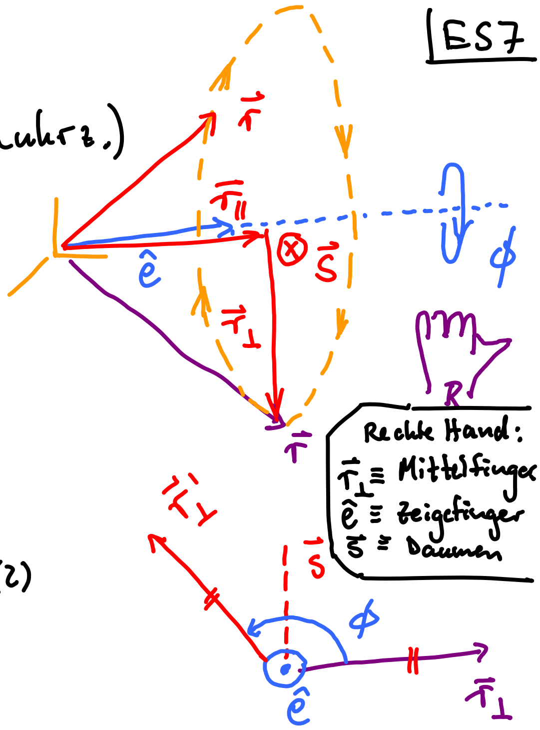
$$\dot{(1)} \qquad \dot{\vec{R}} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu = \frac{\vec{P}}{M} = \text{konst.}$$

Nächster Schritt: Konsequenz der Isotropie des Raums?

Vorher ...

Mathematischer Exkurs über Drehungen

Drehe den Vektor $\vec{r}$ um einen Winkel ϕ (gegenuhrz.) parallel zu einer Achse $\hat{e}$, mit $|\hat{e}| = 1$.
In welchen Vektor $\vec{r}\,'$ geht $\vec{r}$ über?
(Sog. aktive Transf.)



Zerlege $\vec{r}$ bezüglich $\hat{e}$:

$$\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp \qquad (1)$$

Siehe Blatt 0, Einstiegsaufgabe 1

$$= \hat{e}(\hat{e}\cdot\vec{r}) - \hat{e}\times\underbrace{(\hat{e}\times\vec{r})}_{\text{def:} = \vec{s}} \qquad (2)$$

Schreibe: $\quad \vec{r}_\perp = -\hat{e}\times\vec{s} \qquad (3) \qquad (|\vec{r}_\perp| = |\vec{s}|)$

mit $\quad \vec{s} = \hat{e}\times\vec{r} \qquad (4)$

$$\vec{r}_\perp\,' = \vec{r}_\perp \cos\phi + \vec{s}\sin\phi \qquad (5)$$

Rotierter Vektor: $\quad \vec{r}\,' = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp\,' \stackrel{(5)}{=} \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp\cos\phi + \vec{s}\sin\phi \qquad (6)$

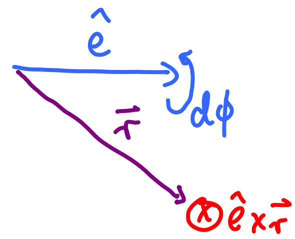
$$\vec r\,' \overset{(2)}{=} \hat e(\hat e\cdot\vec r) \underbrace{- \hat e\times\vec s}_{\overset{(2)}{=}\ \vec r - \hat e(\hat e\cdot\vec r)} \cos\phi + \hat e\times\vec r\,\sin\phi \qquad (1)$$

$$\boxed{\vec r\,' = \vec r\cos\phi + (1-\cos\phi)\,\hat e(\hat e\cdot\vec r) + \hat e\times\vec r\,\sin\phi} \qquad (2)$$

Infinitesimale Drehung um $d\phi$:

$$\boxed{\vec r\,' = \vec r + \hat e\times\vec r\,d\phi + \text{Ordnung}(d\phi^2)} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\phi &= 1 - \frac{\phi^2}{2} + \dots\\ \sin\phi &= \phi\end{aligned}\right\}\ \phi\to 0.$$



Ende math. Exkurs. //

Def: Drehimpuls eines Teilchens bezüglich Ursprung: $\vec L \overset{\text{def}}{=} \vec r\times\vec p$ (1)

Def: Drehmoment, das auf Teilchen wirkt: $\vec M = \vec r\times\vec F$ (2)

Satz: Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec r_1, \dots, \vec r_N)$ beschrieben. Falls V invariant unter Drehungen um den Ursprung ist,

gleiche Transf. (8.2) für alle N Vektoren

$$V(\vec r_1, \dots, \vec r_N) = V(\vec r_1\,', \dots, \vec r_N\,') \qquad (3)$$

("Isotropie des Raumes"), dann ist Gesamtdrehimpuls bezüglich des Ursprungs, $\vec L = \sum_{\nu=1}^{N} \vec r_\nu\times\vec p_\nu$, zeitlich erhalten.

Bem: Verallg. für Drehung um anderen Punkt ist offensichtlich. ES10

Beweis: Betrachte inf. Drehung $d\phi$ um Einheitsvektor $\hat{e}$:

(8.3) $$\vec{r}\,' = \vec{r} + \hat{e} \times \vec{r}\, d\phi \qquad (1)$$

$\frac{d}{d\phi}$ (9.3): $$\left.\frac{d}{d\phi}\right|_{\phi=0} V(\vec{r}_1{}', \dots \vec{r}_N{}') = \left.\frac{d}{d\phi}\right|_{\phi=0} V(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N) = 0 \qquad (2)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial r'_{\nu i}} \left.\frac{d r'_{\nu i}}{d\phi}\right|_{\phi=0} \qquad (3)$$

$$0 = \sum_{\nu=1}^{N} \underbrace{(\vec{\nabla}_\nu V)}_{-\vec{F}_\nu} \cdot (\hat{e} \times \vec{r}) = -\sum_{\nu=1}^{N} \hat{e} \cdot (\vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu) \qquad (4)$$

$\hat{e}$ ist beliebig $\Rightarrow$ $$0 \overset{(4)}{=} \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu = \vec{M}$$ $\leftarrow$ {Gesamtdrehmoment verschwindet (5)

ES11

Folglich: $(\dot{9.1})$ $$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_\nu \underbrace{\dot{\vec{r}}_\nu \times \vec{p}_\nu}_{\dot{\vec{r}}_\nu \times m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu = 0} + \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \dot{\vec{p}}_\nu \qquad (1)$$

$\Rightarrow \vec{L}$ = zeitlich konstant. $$\overset{(N2)}{=} \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu \overset{(10.5)}{=} 0 \qquad \square \qquad (2)$$

Folgerung: Isotrope 2-Teilchenpotentiale können nur vom Abstand abhängen.

Bsp: Grav. Pot: $$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \propto \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \qquad (3)$$

Def: Eine "Zentralkraft" wirkt immer in Richtung der Verbindungsgerade zweier Massenpunkte.
$\vec{F}_{\mu\nu} \parallel (\vec{r}_\mu - \vec{r}_\nu)$

Folgerung: Für Zentralkräfte gilt Drehimpulserhaltung:

Beitrag v. m_ν, m_μ $$\vec{M} = \vec{r}_\nu \times \vec{F}_{\nu\mu} + \vec{r}_\mu \times \vec{F}_{\mu\nu} \overset{(N3)}{=} (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu) \times \vec{F}_{\nu\mu} = 0 \qquad (4)$$

Bem (i): Isotrope 2-Teilchenpotentiale führen zu Zentralkräften, denn $V(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)$

$\Rightarrow$ Kraft: $$\vec{F} = -\nabla V(\vec{r}) = -\sum_i \underbrace{\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial r_i}}\hat{e}_i \qquad (1)$$

$$= -\sum_i \frac{\partial f}{\partial r}\underbrace{\frac{\partial r}{\partial r_i}}_{=\frac{r_i}{r}}\hat{e}_i = -\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} \qquad (2)$$

$$\left[r = \left[r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right]^{1/2}, \quad \frac{\partial r}{\partial r_1} = \frac{r_1}{\left[r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right]^{1/2}} = \frac{r_1}{r} \right]$$

$$\left[\hat{r} = \frac{r_i \hat{e}_i}{r}\right]$$

Bem ii): Es gibt auch (z.B.) isotrope 3-Körperpotentiale die keine Zentralkräfte sind. Auch für diese gilt, wie gezeigt, Drehimpulserhaltung!

Zentrales Thema der modernen Theoretischen Physik: $\boxed{\text{Symmetrien} \longrightarrow \text{Erhaltungssätze}}$

Mathematischer Exkurs: Dreidimensionale Drehgruppe

Def: Drehmatrix: R sei eine reelle, orthogonale Matrix, d.h.

$$R^T R = 1 \quad (\to RR^T = 1) \qquad (1) \qquad \left[(R^T)_{ij} \overset{\text{def}}{=} R_{ji}\right]$$

transponiert

Def: "Rotation": $$r_i' = \sum_k R_{ik} r_k \qquad (2)$$

Unter (2) bleiben Längen erhalten!

Beweis: $$(r')^2 = \sum_{i=1}^{3} r_i' r_i' = \sum_i \sum_{jk} (R_{ij} r_j)(\underbrace{R_{ik} r_k}) \qquad (3)$$

$$= \sum_{jk} r_j \underbrace{\sum_i R^T_{ji} R_{ik}}_{(R^TR)_{jk} \overset{(1)}{=} \mathbb{1}_{jk} = \delta_{jk}} r_k$$

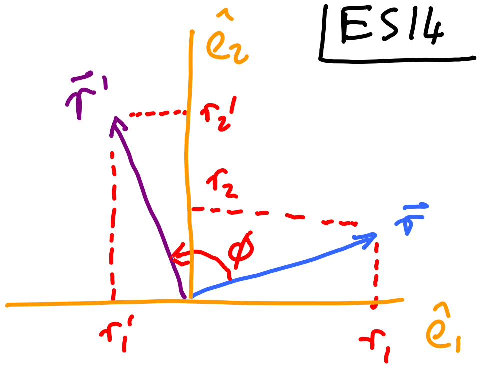
$$= \sum_j r_j r_j = r^2 \qquad (4)$$

Bem: Da $\vec{r}'^2 = \vec{r}^2$, stellt R eine Drehung dar!

Beispiel in 2 Dim:

$$r_1' = \cos\phi\, r_1 - \sin\phi\, r_2 \qquad (1a)$$

$$r_2' = \sin\phi\, r_1 + \cos\phi\, r_2 \qquad (1b)$$



$$\begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}}_{\equiv R} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

In 3D:

<u>Def:</u> $\det R = +1$: " reine Drehung", $R \in \underbrace{SO(3)}_{}$

Name für Drehgruppe.

z.B.: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det R = -1$: Drehung + Raumspiegelung

Jede SO(3)-Rotation läßt sich durch Hintereinanderausführen von Drehungen um die drei Koordinatenachsen aufbauen:

Drehung um z-Achse (gegen Uhrzeigersinn):

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Drehung um x-Achse (gegen Uhrzeigersinn):

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Drehung um y-Achse (gegen Uhrzeigersinn):

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Zusätzliches Element für O(3):

Raumspiegelung: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

SO(3) ist damit eine 3-parametrige Gruppe.

Einschub: "Gruppenaxiome": Mitglieder einer "Gruppe" $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots\}$ haben folgende Eigenschaften:

1) Verknüpfungsoperation: Falls g_1 und $g_2 \in \mathcal{G}$, dann $g_1 \cdot g_2 \in \mathcal{G}$
2) Assoziativ: $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$
3) Einheitselement: Es existiert $e \in \mathcal{G}$, sodaß $e \cdot g = g \quad \forall g \in \mathcal{G}$
4) Inverse: $\forall g \in \mathcal{G}$ existiert $g^{-1} \in \mathcal{G}$, so dass $g \cdot g^{-1} = e$

Rotationen $R \in SO(3)$ erfüllen alle diese Axiome. Bsp.:

Sei $R_1, R_2 \in SO(3)$, und $M \equiv R_1 \cdot R_2$, dann

$$M^T M = (R_2^T \cdot \underbrace{R_1^T) \cdot (R_1}_{=1} \cdot R_2) = R_2^T \cdot R_2 = 1 \Rightarrow M \in SO(3)$$

$$M_{ij} = (R_1)_{ik} (R_2)_{kj}$$

$$(M^T)_{ij} = M_{ji} = (R_1)_{jk} (R_2)_{ki}$$
$$= (R_1^T)_{kj} (R_2^T)_{ik}$$
$$= (R_2^T)_{ik} (R_1^T)_{kj}$$
$$= (R_2^T \cdot R_1^T)_{ij}$$

$$\Rightarrow M^T = R_2^T \cdot R_1^T$$

$$M^T_{12} = (R_1)_{11} (R_2)_{12} + (R_1)_{12} (R_2)_{22} + (R_1)_{13} (R_2)_{32}$$
$$= (R_1^T)_{11} (R_2^T)_{21} + \dots + \dots$$
$$= (R_2^T)_{21} (R_1^T)_{11}$$