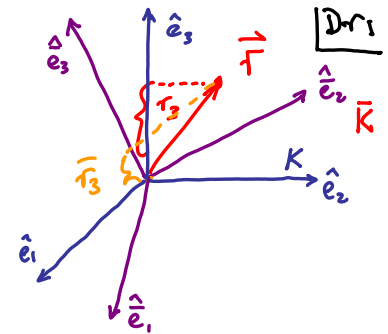


Ergänzung: Drehungen

US - 30.6.07

orthonormalen Basisvektoren

$$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \text{ oder } \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \Rightarrow \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$



$$\hat{e}_j, \text{ dargestellt in } K: \hat{e}_j = \sum_m (\hat{e}_j \cdot \hat{e}_m) \hat{e}_m =: D_{jm} \hat{e}_m \quad (\sum_m \text{ implizit})$$

$$\vec{a} = \sum_j (\vec{a} \cdot \hat{e}_j) \hat{e}_j \quad \text{Drehmatrix} \leftarrow D_{jm} \quad \text{Komponente v. } \hat{e}_j \text{ in Richtung } \hat{e}_m$$

Ortsvektor $\vec{r}$ ist geometrische Größe

$\Rightarrow$ unabhängig vom Koordinatensystem

$$\vec{r}(\vec{K}) = \vec{r}(K) \quad \vec{r}_j = (\vec{r}_i \hat{e}_i) \cdot \hat{e}_j = (x_m \hat{e}_m) \cdot \hat{e}_j = D_{jm} x_m$$

$$\vec{r}_j = D_{jm} x_m$$

explizit:

$$\vec{r} = D \cdot x$$

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} x_1 + D_{12} x_2 + D_{13} x_3 \\ D_{21} x_1 + D_{22} x_2 + D_{23} x_3 \\ D_{31} x_1 + D_{32} x_2 + D_{33} x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Def: "Inverse Matrix"

D^{-1} zu D erfüllt:

$(n \times n)$

$$D^{-1} \cdot D = D \cdot D^{-1} = \mathbb{1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} \cdot \vec{x} = D^{-1} \cdot D \cdot x = x$$

$$(D_{ij}^{-1}) \vec{x}_j = x_i$$

(3)

D^{-1} beschreibt Rückdrehung von $\vec{K}$ nach K

$$(8.2) \cdot \hat{e}_i$$

$$x_i = (x_m \hat{e}_m) \cdot \hat{e}_i = (\vec{x}_j \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_i = \sum_j \vec{x}_j D_{ji} = \sum_j D_{ji}^T \vec{x}_j \quad (4)$$

$$x_i \stackrel{(4)}{=} (D_{ij}^T) \vec{x}_j \stackrel{(3)}{=} (D_{ij}^{-1}) \vec{x}_j \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vec{x}_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$D^{-1} = D^T \Rightarrow (D^{-1})_{ij} = (D_{ji})$$

vergleiche mit (7.3)!

Wichtig!!

(6)

Orthonormiertheit der Basisvektoren impliziert:

$$\delta_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \stackrel{(5.2)}{=} \underbrace{(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_m)}_{\delta_{im}} \cdot \underbrace{(\hat{e}_m \cdot \hat{e}_j)}_{\delta_{mj}} = \sum_n \delta_{in} \delta_{jn} \quad (1)$$

$\hat{e}_i = \text{Dim } \hat{e}_m$

Zeilenvektoren von D sind orthonormal!

$$\delta_{ij} = (\text{Zeilenvektor } i \text{ von } D) \cdot (\text{Zeilenvektor } j \text{ von } D) \quad (2)$$

Beispiel v. Seite 6: $D = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$; $\delta_{11} = (c \ s) \cdot (c \ s) = c^2 + s^2 = 1 \checkmark$
 $\delta_{12} = (c \ s) \cdot (-s \ c) = cs - sc = 0 \checkmark$

Analoges gilt für Spaltenvektoren: $D^{-1}(5.2): D_{jn}^{-1} \hat{e}_n = \hat{e}_j \quad (3)$

$$\delta_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \stackrel{(3)}{=} (D_{in}^{-1} \hat{e}_n) \cdot (D_{jm}^{-1} \hat{e}_m) = D_{in}^{-1} D_{jm}^{-1} \delta_{nm} \stackrel{(8.6)}{=} D_{ni} D_{mj} \quad (4)$$

$\delta_{nm} = \delta_{nn} = 1$

$$1 = D^T D$$

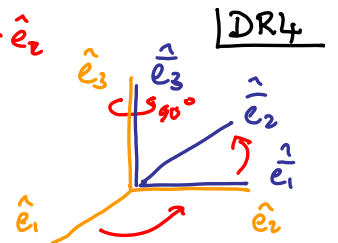
Spaltenvektoren von D sind orthonormal!

$$\delta_{ij} = (\text{Spaltenvektor } i \text{ von } D) \cdot (\text{Spaltenvektor } j \text{ von } D) \quad (5)$$

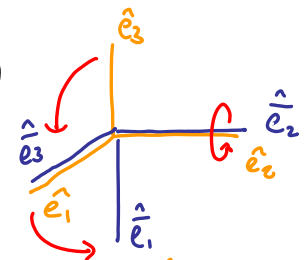
Beispiel v. Seite 6: $D = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$; $\delta_{11} = (c \ -s) \cdot (c \ -s) = c^2 + s^2 = 1 \checkmark$
 $\delta_{12} = (c \ -s) \cdot (s \ c) = cs - sc = 0 \checkmark$

Rotationen vertauschen nicht!

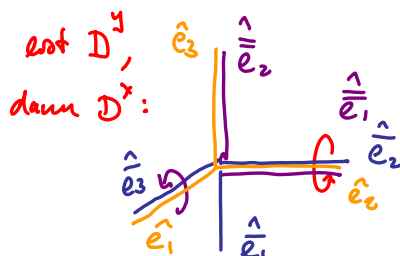
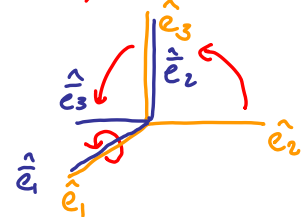
Rotation um 90° um z-Achse: $D_z^{(90^\circ)} = \hat{e}_j \cdot \hat{e}_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$



Rotation um 90° um y-Achse: $D_y^{(90^\circ)} = \hat{e}_j \cdot \hat{e}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$

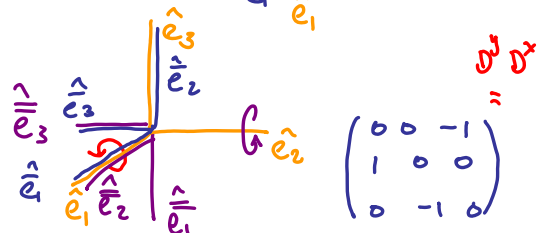


Rotation um 90° um x-Achse: $D_x^{(90^\circ)} = \hat{e}_j \cdot \hat{e}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D^x D^y$$

erst D^x , dann D^y :



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = D^y D^x$$

Beschleunigte Bezugssysteme

VS: 30.4.07

BB1

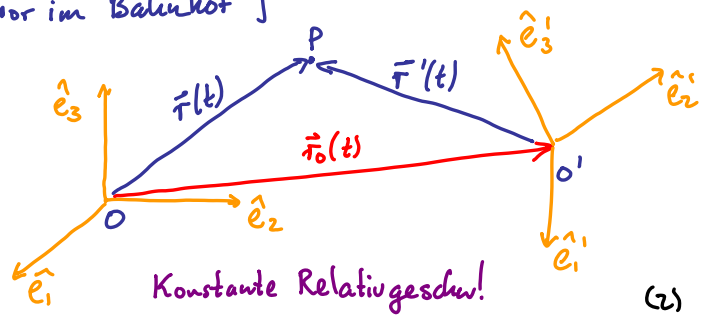
(Alle) Inertialsysteme sind für Beschreibung (aller) physikalischer Gesetze äquivalent. [Labor im Zug = Labor im Bahnhof]

Zusammenfassung: Galilei-Transf.:

Seien O und O' zwei

IS, mit $t' = t$,

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0(t) \quad (1)$$



(2)

Transformationsregel $\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - [\vec{v}t + \vec{r}_0]$, $t' = t$ "Galilei-Transf." von IS zu IS':

Koordinatenschreibweise:

$$x_j'(t) \hat{e}_j' = [x_j(t) - v_j t - x_{j,0}] \hat{e}_j \quad (3)$$

(3) $\cdot \hat{e}_i'$

$$x_j'(t) \underbrace{\hat{e}_j' \cdot \hat{e}_i'}_{\delta_{ij}} = [\quad] \underbrace{\hat{e}_j \cdot \hat{e}_i'}_{D_{ij} \leftarrow \text{Drehmatrix}} \quad (4)$$

$$x_i'(t) = D_{ij} (x_j(t) - v_j t - x_{j,0}) \quad (5)$$

(vergleiche NM22.1)

$$= D_{ij} x_j(t) - v_i t - x_{i,0} \quad (6)$$

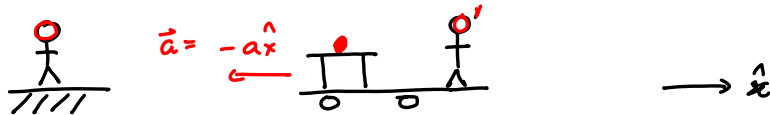
Beschleunigte Bezugssysteme:

BB2

Wird O' relativ zu O beschleunigt, misst O' andere Kräfte als O , und merkt so die Beschleunigung. $\Rightarrow O'$ ist kein IS.

Beobachtungen von O und O' sind äquivalent.

Beispiel:



Wagen wird nach **links** beschleunigt, Kugel rollt nach **rechts** vom Tisch!

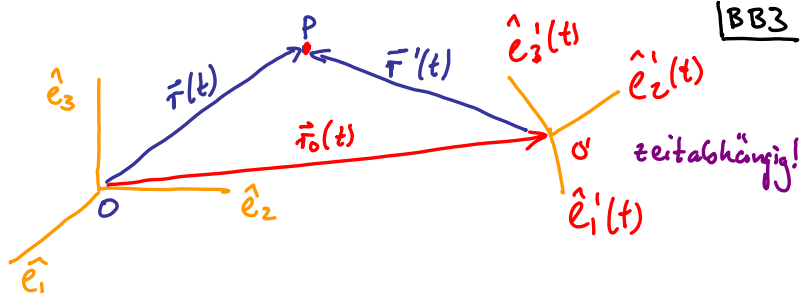
O sagt: Ich ruhe, Kugel bewegt sich **nicht**, spürt also **keine** Kraft, $\vec{F} = 0$.

O' sagt: Ich ruhe, Kugel beschleunigt sich mit $a \hat{x}$ nach **rechts**, spürt also Kraft $\vec{F}' = m a \hat{x}$ = "Scheinkraft" = "Trägheitskraft"

Eine Scheinkraft oder Trägheitskraft ist keine wirkliche Kraft. Wird nur gebraucht, um Messung in beschleunigten Bezugssystem (BS) O' zu interpretieren, falls Beschleunigung nicht berücksichtigt wird. In einem IS (O) sind alle Scheinkräfte = 0.

Allgemeine Transformationsregel:

Sei O (z.B. raumfest) ein IS,
 O' (z.B. rotierend) $\neq$ IS:



BB3

Ortsvektor: $\vec{r}(t) - \vec{r}_0(t) = \vec{r}'(t)$ (1)

$$x_i(t) \hat{e}_i - x_{i,0}(t) \hat{e}_i = x'_i(t) \hat{e}'_i(t) \quad (2)$$

(3)

Geschwindigkeit: (2) $\dot{x}_i(t) \hat{e}_i - \dot{x}_{i,0}(t) \hat{e}_i = \dot{x}'_i(t) \hat{e}'_i(t) + x'_i(t) \dot{\hat{e}}'_i(t)$

Interpretation:

Geschw. v. P laut O

Geschw. v. O' relativ zu O

Geschw. v. P laut O'

Geschw. eines starr mit O' mitrotierenden Punktes, v. O aus gesehen (nur Richtung ändert sich)

Kurznotation für (3): $\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ (4)

Punkt besagt (nur heute): Ableitung wirkt nur auf Komponenten.

Einschub: warum ist $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ die allgemeinste Form von $x'_i(t) \dot{\hat{e}}'_i(t)$?

BB4

Anforderung: $\delta_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j \quad \forall t$ (1)

$$0 \stackrel{(1)}{=} \frac{d}{dt} (\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j) = \begin{cases} 2 \hat{e}'_i \cdot \dot{\hat{e}}'_i & \text{falls } i=j \\ \dot{\hat{e}}'_i \cdot \hat{e}'_j + \hat{e}'_i \cdot \dot{\hat{e}}'_j & \text{falls } i \neq j \end{cases} \Rightarrow \hat{e}'_i \perp \dot{\hat{e}}'_i \quad (2a)$$

(2b)

(2) wird erfüllt durch folgenden Ansatz:

$$\dot{\hat{e}}'_i = \vec{\omega} \times \hat{e}'_i$$

$$x'_i(t) \dot{\hat{e}}'_i = (\vec{\omega} \times \hat{e}'_i) x'_i(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (3)$$

(4a)

Check:

Vergleich: Es 8

$$\vec{r}'' = \vec{r}' + \hat{A} \times \vec{r}' d\phi$$

$$\frac{\vec{r}'' - \vec{r}'}{dt} = \hat{A} \times \vec{r}' \frac{d\phi}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Ende Einschub

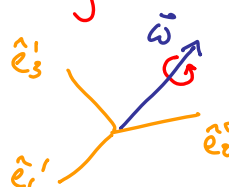
$$2 (\vec{\omega} \times \hat{e}'_i) \cdot \hat{e}'_i = 0 \quad \checkmark$$

$$(\vec{\omega} \times \hat{e}'_i) \cdot \hat{e}'_j + \hat{e}'_i \cdot (\vec{\omega} \times \hat{e}'_j) = 0 \quad (4b)$$

$$(\hat{e}'_j \times \vec{\omega}) \cdot \hat{e}'_i = -(\vec{\omega} \times \hat{e}'_j) \cdot \hat{e}'_i \quad \text{heben sich weg}$$

$\vec{\omega}$ = momentane Winkelgeschwindigkeit
 $\hat{\omega}$ = Drehachse
 $|\vec{\omega}|$ = Drehgeschwindigkeit = $\frac{d\phi}{dt}$

(5)



Ausführliche Version des Einschubs:

BK 4a

Zur Interpretation von $\vec{\omega}$ als momentane Winkelgeschwindigkeit sei an ein Ergebnis von Vorlesung 4, Seite ES8, Gleichung 3 erinnert:

Für infinitesimale Drehung um $d\phi$, um $\hat{e}$ -Achse:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \hat{e} \times \vec{r} d\phi \quad (*)$$

Für den aktuellen Zurech

Ausgangsvektor: $\vec{r} \rightarrow \hat{e}$

machen wir folgende Assoziationen:

Rotierter Vektor: $\vec{r}' \rightarrow \hat{e}' + \Delta \hat{e}'$

Rotationsachse: $\hat{e} \rightarrow \hat{n}$

(*) liefert dann:

$$\hat{e}' + \Delta \hat{e}' = \hat{e}' + \hat{n} \times \hat{e}' d\phi$$

pro Zeiteinheit:

$$\frac{\Delta \hat{e}'}{dt} = \left(\hat{n} \frac{d\phi}{dt} \right) \times \hat{e}'$$

Definiere: $\vec{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{n} \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow$
= "Winkelgeschwindigkeit"

$$\dot{\hat{e}}' = \vec{\omega} \times \hat{e}'$$

$$(3.3): \quad \dot{\vec{x}}_i(t) \hat{e}_i - \dot{\vec{x}}_{i,0}(t) \hat{e}_i = \dot{\vec{x}}'_i(t) \hat{e}'_i(t) + \underbrace{\vec{x}'_i(t) \dot{\hat{e}}'_i(t)}_{\vec{\omega} \times \vec{r}'} \quad \text{BBS} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{r}_0)}_{\text{Zeitableitung von } 0 \text{ aus}} = \underbrace{\frac{d}{dt}(\vec{r}')}_{\text{Zeitableitung von } 0' \text{ aus, betrifft nur Komponenten}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\text{Einfluss der Rotation v. } 0' \text{ relativ zu } 0} \quad (2)$$

Eiselsbrücke zur Ableitung eines

Vektors in rotierendem Bezugssystem:

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{R} \right)_{IS} = \left(\frac{d}{dt} \vec{R}' \right)_{BS'} + (\vec{\omega} \times \vec{R}')_{BS'} \quad (3)$$

Beschleunigung: $\frac{d}{dt} \vec{r}$?

$$\frac{d}{dt}(2) = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_0) = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}') + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}')_{IS} \quad (4)$$

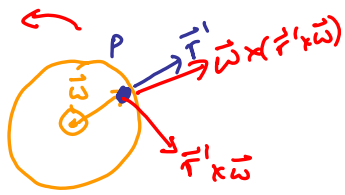
$$(\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_0)_{IS} = \left(\frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' \right)_{BS'} + \left(\frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right)_{BS'} \quad (5)$$

$$\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_0 = \ddot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' (1 + 1) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (6)$$

Bewegungsgleichung:

in $O (= IS)$: $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ (1)

in $O' (\neq IS)$: $\boxed{\vec{F}' = m\ddot{\vec{r}}'} = m\ddot{\vec{r}} - m\ddot{\vec{r}}_0 + 2m\dot{\vec{r}}' \times \vec{\omega} + m\vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega}) + m\vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}}$ (2)



$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_l + \vec{F}_c + \vec{F}_z + m\vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}}$ (3)

linear-
beschleunigende
Kraft

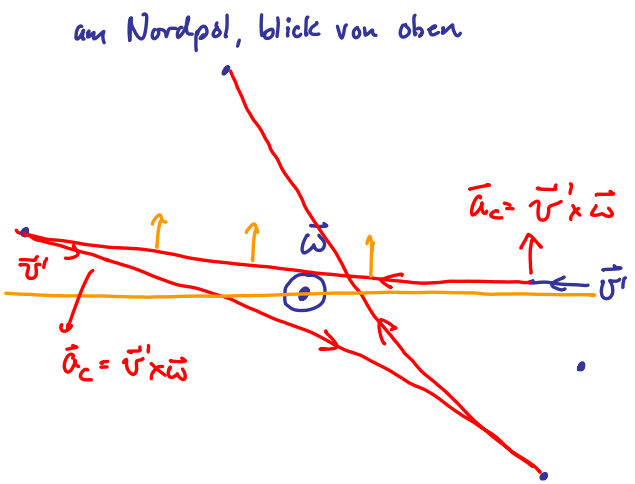
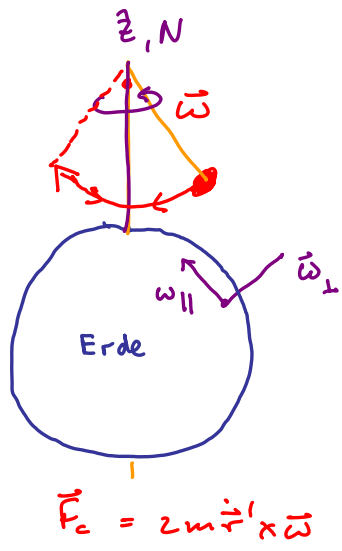
"Coriolis-
Kraft"

Zentrifugal-
Kraft

Die Scheinkräfte $\vec{F}_l, \vec{F}_c, \vec{F}_z, m\vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}}$ werden in O' (aber nicht O) benötigt, (weil $O' \neq IS$), um die (sehr realen!), in O' gemessenen Beschleunigungen $[-\ddot{\vec{r}}_0, 2\dot{\vec{r}}' \times \vec{\omega}, \vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega}), \vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}}]$ zu interpretieren.

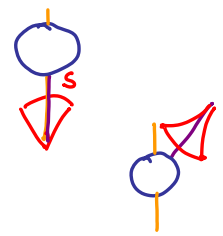
Gaspard Gustave de Coriolis (* 21. Mai 1792 in Nancy; † 19. September 1843 in Paris) war ein französischer Mathematiker und Physiker.

Beispiel : Coriolis-Kraft : $\vec{a}_c = 2(\vec{v}' \times \vec{\omega})$ Foucaultsches Pendel



Aufgaben zum selberrechnen:

- wie sieht das Schwingungsmuster am Südpol aus?
- " " " " an Äquator?



Jean Bernard Léon Foucault (* 18. September 1819 in Paris; † 11. Februar 1868 ebenda) war ein französischer Physiker. 188

Foucault wurde in Paris geboren. Seine Ausbildung erhielt er von einem Privatlehrer, da ihm mangels Fleiß und Betragen nahegelegt wurde, die Schule zu verlassen. Er begann ein Medizinstudium, musste aber auch dieses abbrechen, da er den Ekel beim Sezieren nicht überwinden konnte. Ohne Universitäts-Studium widmete er sich der Physik und erarbeitete sich alles autodidaktisch.

In den 1840er Jahren trug er zu den Comptes Rendus, einer Beschreibung eines elektromagnetischen Regulators für die elektrische Bogenlampe bei und veröffentlichte zusammen mit Henri Victor Regnault eine Arbeit über binokulares Sehen. 1851 führte er das nach ihm benannte Foucaultsche Pendel der Öffentlichkeit vor. Dieses ursprünglich von Vincenzo Viviani übernommene Experiment zeigte laientauglich erstmals die Erdrotation.

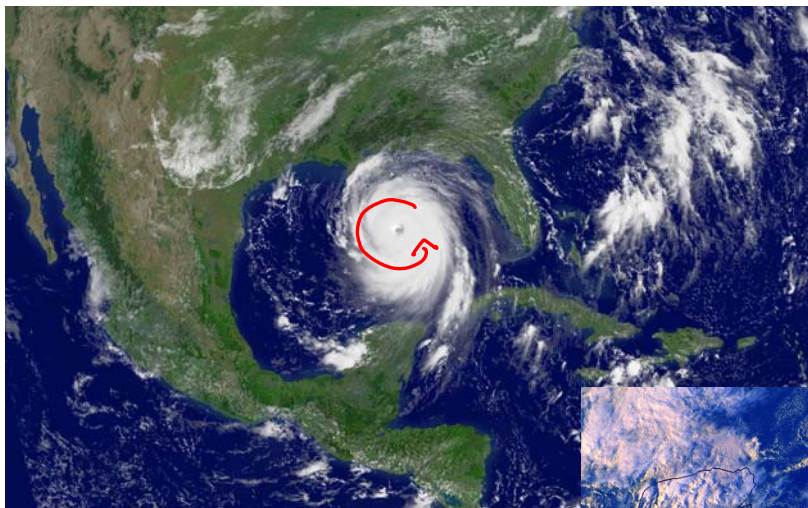


Ein Jahr später gelang ihm mit Hilfe der Drehspiegelmethode eine sehr genaue Messung der Lichtgeschwindigkeit, die er auf 298.000 km/s bestimmte. Er verwendete dabei einen Drehspiegel, der dem von Sir Charles Wheatstone ähnelte. Außerdem bewies er, dass die Lichtgeschwindigkeit in Wasser niedriger als in Luft ist, womit gleichzeitig die Wellennatur des Lichts bestätigt wurde.

In der Optik wird das von ihm entwickelte Foucaultsche Schneidverfahren zur Prüfung optischer Flächen oder ganzer optischer Systeme verwendet.

Weiter untersuchte Foucault Wirbelströme in Metallen, wofür er die Copley Medaille erhielt, entwickelte ein leistungsfähiges Spiegelteleskop und erfand 1852 das Gyroskop, basierend auf Johann Gottlieb Friedrich von Bohnenbergers Maschine von 1817. Er wurde 1865 in die französische Akademie der Wissenschaften aufgenommen.

Foucault erkrankte an Aphasie und starb, fast blind und stumm, am 11. Februar 1868 in Paris.



Hurricane Katrina

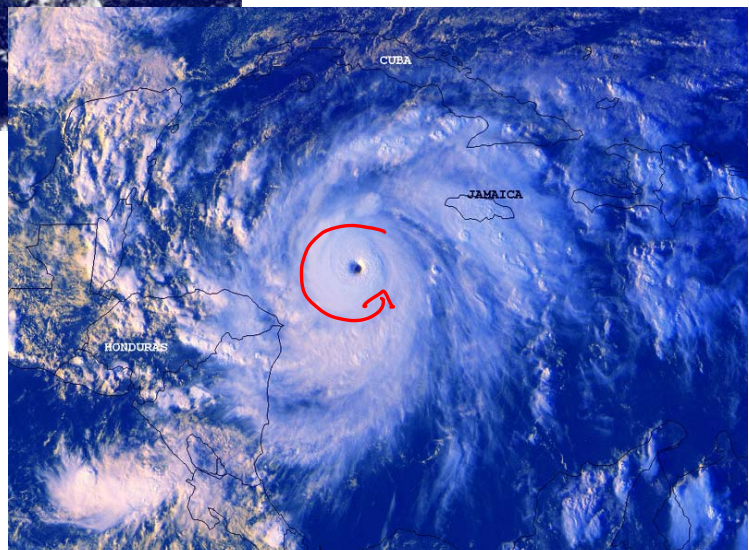
Drehrichtung in Nordhalbkugel:

Gegenuhreigersinn!

Wirbelstürme

189

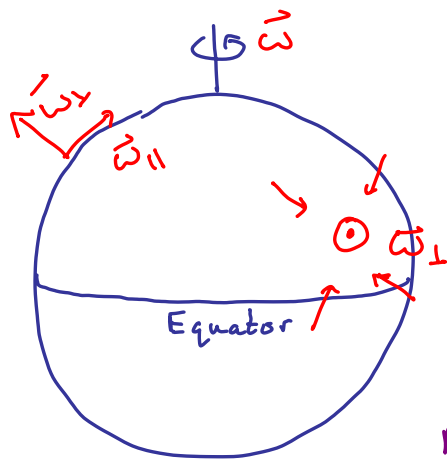
Hurricane Mitch



Wirbelstürme:

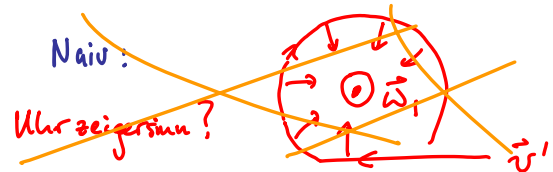
Warme Luft über dem Ozean steigt auf, erzeugt Niederdruckgebiet, das Luft lateral ansaugt. Die Coriolis-Kraft lenkt die angesaugte Luft ab, sodass Wirbel entsteht.

13810



$$\vec{F}_C = 2m \vec{v}' \times \vec{\omega}$$

Am Equator: $\vec{\omega}_{\perp} = 0 \Rightarrow$
keine Wirbelstürme !!



Druckgradientkraft
berücksichtigen:



Auf Kreisbahn:
Druckgradientkraft
und Corioliskraft

