

Kleine Schwingungen

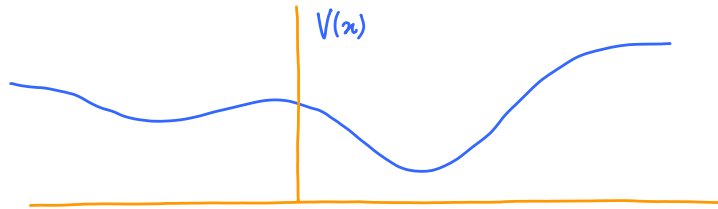
15.6 - 3.5.07

| KSchw 1

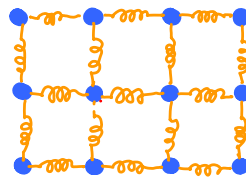
Ziel: generische Beschreibung der Dynamik der Umgebung von stabiler Gleichgewichtslage.

Beispiele:

Teilchen in Potentialminimum:



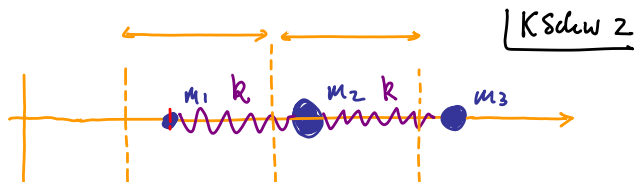
Atome im Kristallgitter:



symbolisiert Rückstellkräfte auf Grund von Coulomb-Wechselwirkung

Beispiel: Dreiatomiges Molekül

3 Atome, (Massen m_i)
gekoppelt durch
2 harmonische Federn:



Positionen:

Gleichgewichtspositionen:

Gleichgewichtsabstände:

(1)

Auslenkungen um
Gleichgewichtslage:

(2)

Potenentielle Energie: $V(y_1, y_2, y_3) =$

(3)

$$= \frac{1}{2} k \left[(y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_2)^2 \right]$$

(4)

Ausgedrückt durch
Auslenkungen:

$$V(y_1, y_2, y_3) =$$

|KSchw 3
(1)

Gleichgewichtsbedingung:

Symmetrische
Schreibweise mittels
einer Matrix $\hat{V}_{ij}$:

$$\tilde{V}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} k [x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 x_3 + x_3^2]$$

(2)

(3)

Analog für

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{y}_3^2$$

(4)

$$= \frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3$$

(5)

=

(6)

Kraft auf Teilchen n:
(n=1, 2, 3)

$$F_n =$$

(1)

|KSchw 4

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i V_{ij} x_j$$

$$(3.3)$$

(2)

Bewegungsgleichung
für Teilchen n:

$$m_n \ddot{y}_n = F_n$$

(3)

(4)

Vektorielle Schreibweise:

$$\boxed{\quad}$$

(System linearer Dg)

(5)

Lösungsansatz:
(siehe Vorl. 2, Dg 8.3)

$$\vec{x}(t) =$$

(6)

(7)

Einsetzen in (4.2)

$$\hat{T} \ddot{\vec{x}} =$$

$$(4.7) \Rightarrow \boxed{}^{(1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Verallgemeinertes} \\ \text{Eigenwertproblem d. Form} \\ (M - \omega^2) \vec{x}_0, \text{ mit} \end{array} \right. \quad \text{KSchw 5}$$

(5.1) ist lineares Gl. system. Lsg. mit $\vec{x}_0 \neq 0$ existieren nur, falls die Matrix $\hat{V} - \omega^2 \hat{T}$ nicht invertierbar ist:

$$\Rightarrow \boxed{}^{(2)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Algebraische Gl. Bedingung} \\ \text{für Eigenfrequenzen} \end{array} \right.$$

Explizit eingesetzt für $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = M$:

$$0 = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$= (k - \omega^2 m) \begin{bmatrix} (2k - \omega^2 M)(k - \omega^2 m) - k^2 - k^2 \end{bmatrix}$$

$$= (k - \omega^2 m) \omega^2 \begin{bmatrix} \omega^2 m M - k(2m + M) \end{bmatrix} \quad (4)$$

3 Lsg. von (5.4) liefer

Eigenwerte: $\omega_{(1)}^2 = \quad \omega_{(2)}^2 = \quad \omega_{(3)}^2 =$

System hat 3 "Eigenfrequenzen":

KSchw 6

Dazugehörigen Eigenvektoren =

Eigenwertbedingung (5.1): $(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) \vec{a} = 0 \quad (1)$

Unnormierte Eigenvektoren: $\vec{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$
(siehe S. 7)

Check:

z.B. für $\omega_{(1)} = 0$: $(V - \omega_{(1)}^2 T) \vec{a}^{(1)} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

⚡Einschub: Explizite Berechnung der Eigenvektoren durch Lösen von (6.1) KSchw 7

(6.1) für $\omega_{(1)} = 0$: $0 = (\hat{V} - 0) \vec{a}^{(1)} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$

(6.1) für $\omega_{(2)} = \sqrt{\frac{k}{m}}$: $\left(\hat{V} - \frac{k}{m} \hat{I} \right) = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{k}{m} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$

$0 = \left(\hat{V} - \frac{k}{m} \hat{I} \right) \vec{a}^{(2)} = k \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \frac{m}{m} & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \\ a_3^{(2)} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(6.1) für $\omega_{(3)} = \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M} \right)$: $\hat{V} - \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M} \right) \hat{I} = k \begin{pmatrix} -\frac{2m}{M} & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \frac{m}{m} - 2 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{2m}{M} \end{pmatrix}$

$0 = \left(\hat{V} - \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M} \right) \hat{I} \right) \vec{a}^{(3)} \Rightarrow \vec{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\frac{m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}$

KSchw 8

Check: $k \begin{pmatrix} -\frac{2m}{M} & -1 & 0 \\ -1 & -\frac{m}{m} & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{2m}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2\frac{m}{M} \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -\frac{2m}{M} + \frac{2m}{M} \\ -1 + 2 & -1 \\ \frac{2m}{M} - \frac{2m}{M} \end{pmatrix} = 0 \checkmark$

⚡ Ende Einschub

Was ist allg. Lsg v. (6.5)? $(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) \vec{x}(t) = 0$ (1) KSchw 9

Wir brauchen unabhängige Integrationskonstanten!

1. Versuch: $\vec{x}(t) =$ (2)

Aber: und sind nicht linear unabhängig, weil

2. Versuch: $\vec{x}(t) = \vec{a}^{(1)}$ (leicht zu verifizieren durch Einsetzen) (3a)

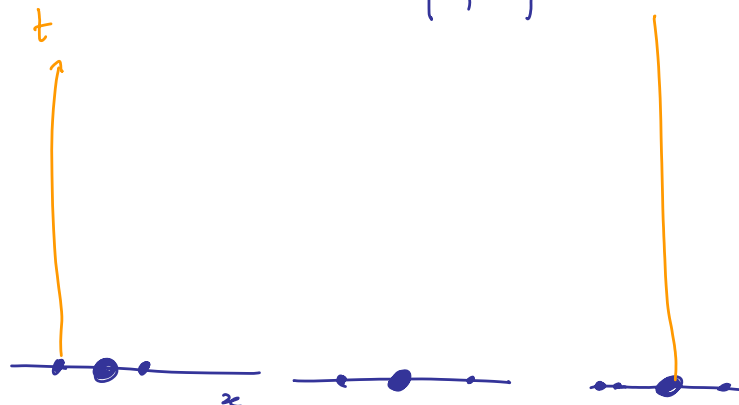
$$+ \sum_{k=2}^3 c^{(k)} \vec{a}^{(k)} \cos(\omega^{(k)} t + \phi^{(k)}) \quad (3b)$$

Da die $\vec{a}^{(k)}$ den vollständigen Vektorraum aufspannen, sind beliebige Anfangsbedingungen durch $c^{(1)}, \phi^{(1)}, c^{(2)}, \phi^{(2)}, c^{(3)}, \phi^{(3)}$ repräsentierbar

KSchw 10

Allgemeine Lösung: $x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (a_1 t + b_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix} A_3 \cos(\omega_3 t + \alpha_3)$

Visualisierung der drei Eigenschwingungen:



$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix}$$