

Kleine Schwingungen vieler Freiheitsgrade

7.5.07

|K Schw 10

Betrachte System mit f Freiheitsgraden: (z.B. N Teilchen in 3 Dim:)

Koordinaten: $q =$

Geschwindigkeiten: $\dot{q} =$ (1)

(2)

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f m_i \dot{q}_i^2 =$ (3)

$$\hat{T}_{ij} = \quad (4)$$

Nebenbemerkung:

Bei fortgeschrittenen Anwendungen (Lagrange, verallgemeinerte Koordinaten), ist $\hat{T}_{ij}$ im allg. nicht -diag, aber stets symmetrisch, mit positiven Eigenwerten.

Wir betrachten hier jedoch nur den (naheliegensten) Fall, $\hat{T}_{ij} = m_i \delta_{ij}$.

Potentielle Energie: U

(1) |K Schw 11

Bewegungsgl: $m \ddot{q}_i =$ (2)

Def:

Gleichgewichtslagen (Fixpunkte) sind zeitunabhängige Lösungen der Bewegungsgleichung:

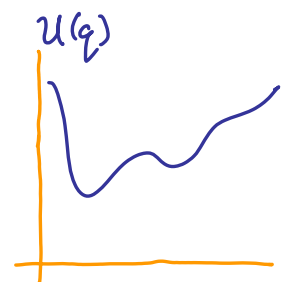
$$q = \text{konst}, \quad \dot{q} = 0, \quad \ddot{q} = 0 \quad (3)$$

Explizit: (4)

(3) in (2):

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

(5)

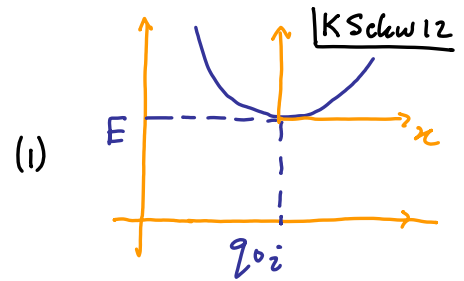


Energie am Fixpunkt: $E_0 =$

(6)

Umgebung eines Fixpunktes:

Entwickle U um q_0 herum, $x = \bar{x}$ } seien klein
 [d.h. $x_i = q_i - q_{i0}$, etc.]



(2)

bis zur quadratischen

Ordnung in $U(q) =$

Höhere Terme vernachlässigbar bei kleinen Auslenkungen:

$+ \mathcal{O}(x^3)$ (enthält , etc.)

Ohne Verlust der Allgemeinheit wählen wir:

(3)

In Matrix-Notation: $U = \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i \hat{V}_{ij} x_j = -\frac{1}{2} (x_1, \dots, x_f) \begin{pmatrix} V_{11} & \dots & V_{1f} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{f1} & \dots & V_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_f \end{pmatrix}$ (4)

Bewegungsgleichung:

$$m_i \ddot{q}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

KSchw 13
(1)

=

(2)

In Matrixnotation:



(Vergleiche Gl. 4.5) (3)

Gl. (3) sind lineare, homogene Dgl. 2. Ordnung mit konst. Koeff.

Vereinfachungen, erreicht durch Vernachlässigung der $\mathcal{O}(x^3)$ -Terme!

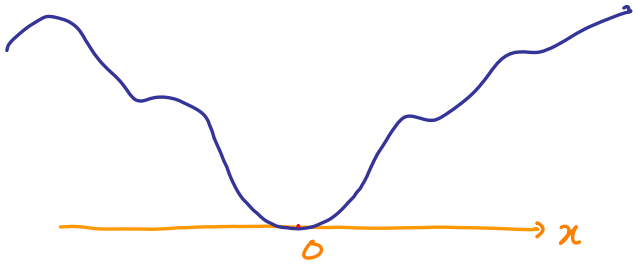
Beispiele: $f=1$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \Rightarrow$$

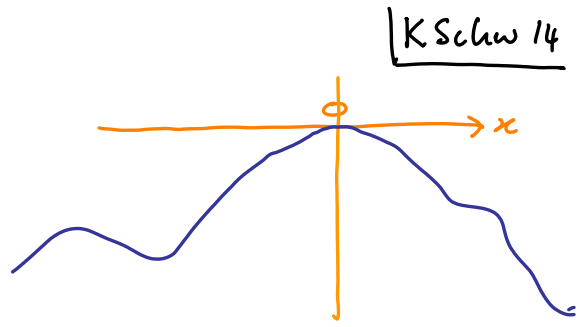
$$U(q) = U_0 + \frac{1}{2} k x^2 + \mathcal{O}(x^3) \Rightarrow$$

(3)

[H0 mit $\omega_0 = \sqrt{k/m_0}$]



$k > 0$: "stabiler Fixpunkt"



$k < 0$: "instabiler Fixpunkt"

$k > 0$:

Lösung: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$ (1a)

$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$ (1b)

Harmonische

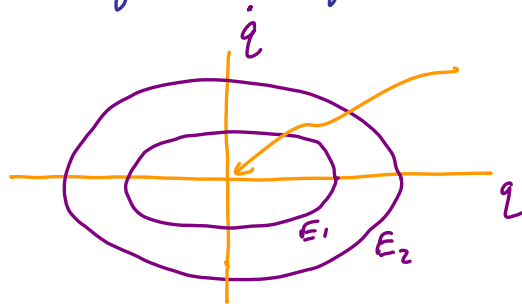
Näherung OK falls
Amplitude klein bleibt:

$$\frac{U(q) - U(q_0)}{U(q_0)} \ll 1 \quad \forall q(t)$$

(17)

Energie-Erhaltung: $E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} k q^2(t) = \text{konst.}$ | K Schw 15
(18)

System folgt Ellipse
im $(q, \dot{q})$ -Phasenraum:
"Elliptischer Fixpunkt"



$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

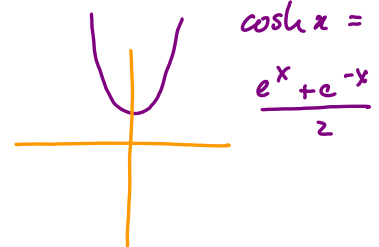
$k < 0$:

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$$

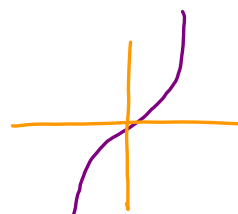
Allg. Lösung: $q(t) =$

$$\begin{cases} \partial_x \cosh x = \sinh x \\ \partial_x \sinh x = \cosh x \end{cases}$$

$\dot{q}(t) =$



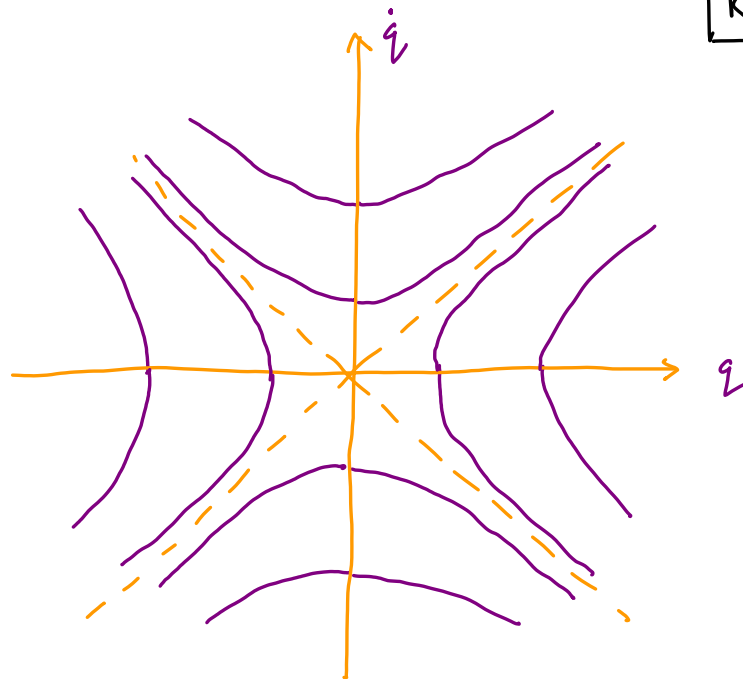
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

System folgt Hyperbel
im Phasenraum
"Hyperbolischer
Fixpunkt"

KSchw 16

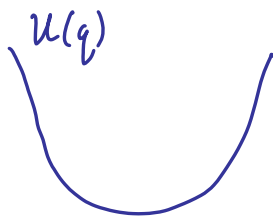
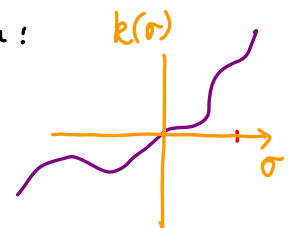


Harmonische Näherung nur für kurze Zeiten OK.
($\omega_0 t \lesssim 1$)

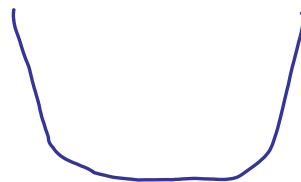
Betrachte $U = U(q, \sigma)$, mit σ = Verstellbarer Parameter KSchw 17

Änderung v. σ kann Charakter des Fixpunkts ändern:

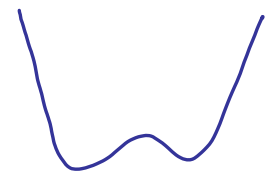
Harmonische Näherung: $U(q, \sigma) =$



stabiler
Fixpunkt



kritischer (oder marginaler)
Fixpunkt



instabiler
Fixpunkt

→
"Bifurkation"

Zurück zur
allg. Gleichung:

$$T_{ij} \ddot{x}_j + V_{ij} x_j = 0$$

| K Schw 18
(1)

Bedingung für stabiles
Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} & U(q_0) \quad U(q_0 + x) \quad \text{f. alle genügend kleine } x \\ (19.3) \Rightarrow & 0 \quad \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i V_{ij} x_j \end{aligned} \quad \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Transformiere zur
Eigenbasis von V :

(4)

(3) erfordert:

Eigenwerte v. V sind positiv!
" V ist positiv-definite Matrix " (T auch)
(5)

Allg. Lösungsverfahren
für Gl. (18.1);

$$T_{ij} \ddot{x}_j + V_{ij} x_j = 0$$

| K Schw 19
(1)

Betrachte
 $x(t) = \operatorname{Re}[X(t)]$,

$$T_{ij} \ddot{X}_j + V_{ij} X_j = 0$$

(2)

Komplexer Lösungs Ansatz

$$X(t) =$$

(3)

komplexer Spaltenvektor

(3) in (2):

(4)

Matrix-Notation:

Eigenwert-
Problem

(5)

Nicht-triviale Lösung
erfordert:

(6)

charakteristisches
Polynom:

Polynom von Grad f
mit reellen Koeffizienten
(7)

Nullstellen v. $P^{(f)}$, ω_α^2 , $\alpha = 1, \dots, f$
 sind die "Eigenfrequenzen" von (19.5)

(1) KSchw20
 [im Allg. ist ω_α^2 komplex]

Eigenvektoren $A^{(\alpha)}$
 erfüllen die Gl: (2)

Entsprechende Lösung $X^{(\alpha)}(t) =$ "Eigenmode, Eigenschwingung" (3)
 v. (19.2):

Falls $\text{Im}(\omega_\alpha^2) \neq 0$,
 oder ω_α^2 ist neg. reell } dann ist
 entweder $\text{Im} \omega_\alpha > 0$
 oder $\text{Im}(-\omega_\alpha) > 0$ } also $|X^{(\alpha)}| \rightarrow$
 für $t \rightarrow \infty$ (4)
 instabiles Gleichgewicht !!

Bedingung f. stabiles Gleichgewicht: (5)

Es kann gezeigt werden, dass (5) auch direkt aus (18.5) folgen

Sonderfall: $\omega^{(k)} = 0$:

dann liefert (28.2)

$$\sum_j V_{ij} A_j^{(\alpha)} = 0 \quad (1)$$



$\Rightarrow$ Potential ändert sich nicht in $A_j^{(\alpha)}$ -Richtung

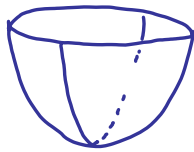
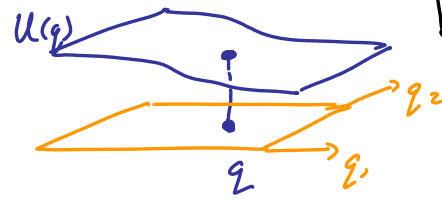
Setze $x_j = A_j^{(\alpha)} f(t)$ in (1):
 $0 = T_{ij} \ddot{x}_j = T_{ij} A_j^{(\alpha)} \ddot{f}(t)$ (2)

$$\Rightarrow f(t) = C_1 + C_2 t \quad (3)$$

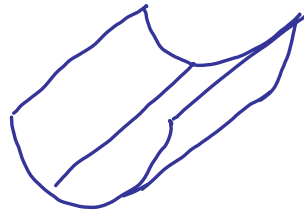
$\omega^{(k)} = 0 \Rightarrow$ gleichförmige Bewegung statt Oszillationen!
 in $A^{(\alpha)}$ -Richtung

Beispiele für $f=z$:

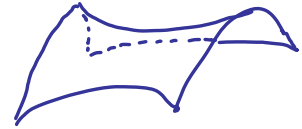
KSchw22



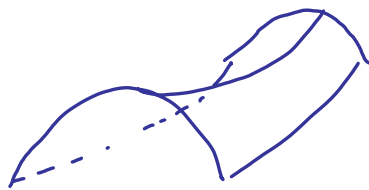
Minimum



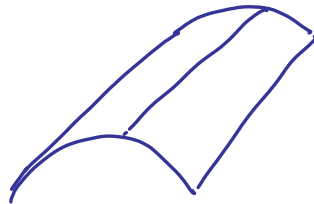
Rinne



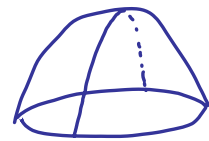
Sattel



Sattel



Tunnel



Maximum