

Betrachte System mit f Freiheitsgraden: (z.B. N Teilchen in 3 Dim: $f=3N$)

Koordinaten: $\underline{q} = (q_1, \dots, q_f)$ z.B.: $(r_{1x}, r_{1y}, r_{1z}, \dots, r_{Nx}, r_{Ny}, r_{Nz})$

Geschwindigkeiten: $\dot{\underline{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ (1)

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f m_i \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i \hat{T}_{ij} \dot{q}_j$ (2)

"Massenmatrix" $\hat{T}_{ij} = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_f \end{pmatrix} = \delta_{ij} m_j$ (3)

Nebenbemerkung:
Bei fortgeschrittenen Anwendungen (Lagrange, verallgemeinerte Koordinaten), ist $\hat{T}_{ij}$ im allg. nicht -diag, aber stets symmetrisch, mit positiven Eigenwerten.
Wir betrachten hier jedoch nur den (naheliegenden) Fall, $\hat{T}_{ij} = m_i \delta_{ij}$.

Potentielle Energie: $U = U(q_1, \dots, q_f)$

(1) |K Schw 11

Bewegungsgl: $m \ddot{q}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i}$ (2)

Def:

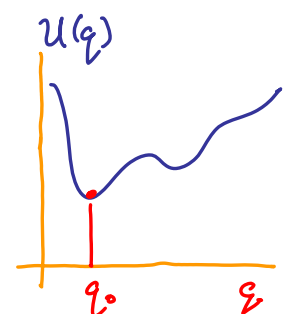
Gleichgewichtslagen (Fixpunkte) sind zeitunabhängige Lösungen der Bewegungsgleichung:

$$\underline{q} = \underline{q}_0 = \text{konst}, \quad \dot{\underline{q}} = 0, \quad \ddot{\underline{q}} = 0 \quad (3)$$

Explizit: $q_i = q_{i0} \quad \forall i=1, \dots, f$ (4)

(3) in (2): $\left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 := \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{\underline{q} = \underline{q}_0} = 0$ (5)

Energie am Fixpunkt: $E_0 = U(q_0)$ (6)



Umgebung eines Fixpunktes: $(x_1, \dots, x_f)$

Entwickle U um q_0 herum, $x = q - q_0$ } seien klein

[d.h. $x_i = q_i - q_{i0}$, etc.]

Taylor-Entwicklung in f Koordinaten bis zur quadratischen

Ordnung in x :

Höhere Terme vernachlässigbar bei kleinen Auslenkungen:

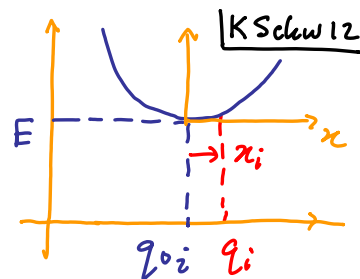
$$U(q) = \left\{ U(q_0) + \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 x_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 x_i x_j \right\} \quad (1.5)$$

$+ \Theta(x^3)$ (enthält $x_i^3, x_i^2 x_j$, etc.)

Ohne Verlust der Allgemeinheit wählen wir: $E_0 = 0, q_0 = 0$ (3)

In Matrix-Notation: $U = \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i \hat{V}_{ij} x_j = -\frac{1}{2} (x_1, \dots, x_f) \begin{pmatrix} V_{11} & \dots & V_{1f} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{f1} & \dots & V_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_f \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2} x^T V x \quad (4)$$



Bewegungsgleichung:

$$m_i \ddot{q}_i \stackrel{(1.2)}{=} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = - \sum_{k=1}^f \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x_k}}_{= \delta_{ki}} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \sum_j V_{kj} x_j \quad (1)$$

$$m_i \ddot{x}_i = - \sum_j \hat{V}_{ij} x_j \quad (2)$$

In Matrixnotation:

$$\hat{T} \ddot{x} + \hat{V} x = 0 \quad (\text{Vergleiche Gl. 4.5}) \quad (3)$$

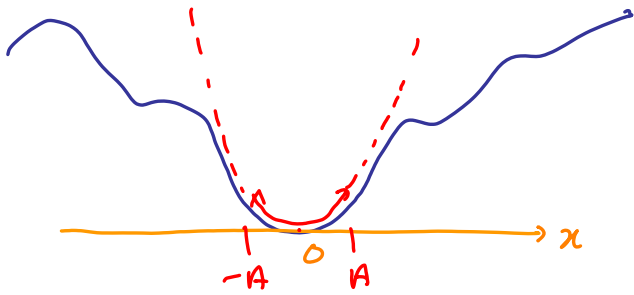
Gl. (3) sind lineare, homogene Dgl. 2. Ordnung mit konst. Koeff. Vereinfachungen, erreicht durch Vernachlässigung der $O(x^3)$ -Terme!

Beispiele: $f=1$

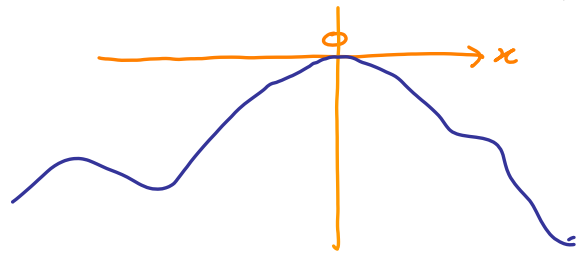
$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \Rightarrow T_{ij} \rightarrow m$$

$$U(q) = U_0 + \frac{1}{2} k x^2 + o(x^3) \Rightarrow V_{ij} \rightarrow k$$

$$(3) \quad m \ddot{x} + kx = 0 \quad \checkmark \quad [\text{HO mit } \omega_0 = \sqrt{k/m}]$$



$k > 0$: "stabiler Fixpunkt"



$k < 0$: "instabiler Fixpunkt"

$k > 0$:

Lösung: $x(t) = \underline{A} \cos(\omega_0 t + \underline{\delta})$ (1a)

$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$ (1b)

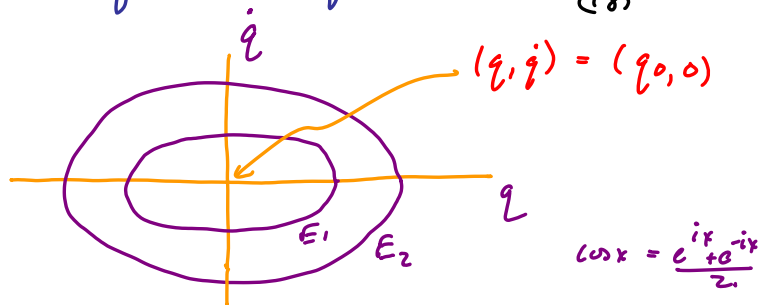
Harmonische

Näherung OK falls
Amplitude klein bleibt:

$$\frac{U(q) - U(q_0)}{U(q_0)} \ll 1 \quad \forall q(t) \Rightarrow (\text{d.h. } q \in [-A, A]) \quad (17)$$

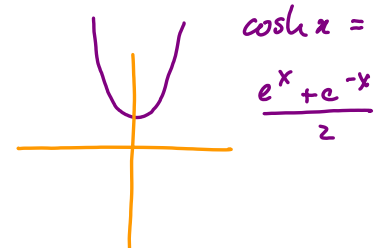
Energie-Erhaltung: $E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} k q^2(t) = \text{konst.}$ KSchw 15
(18)

System folgt Ellipse
im $(q, \dot{q})$ -Phasenraum:
"Elliptischer Fixpunkt"



$k < 0$: ($k = -\omega_0^2$) $\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$ (13.3)

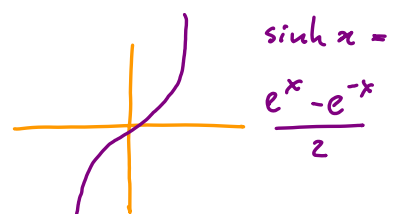
Allg. Lösung: $q(t) = A \cosh(\omega_0 t + \delta)$



$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \partial_x \cosh x = \sinh x \\ \partial_x \sinh x = \cosh x \end{array} \right]$

$\dot{q}(t) = A \omega_0 \sinh(\omega_0 t + \delta)$
 $|q| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$

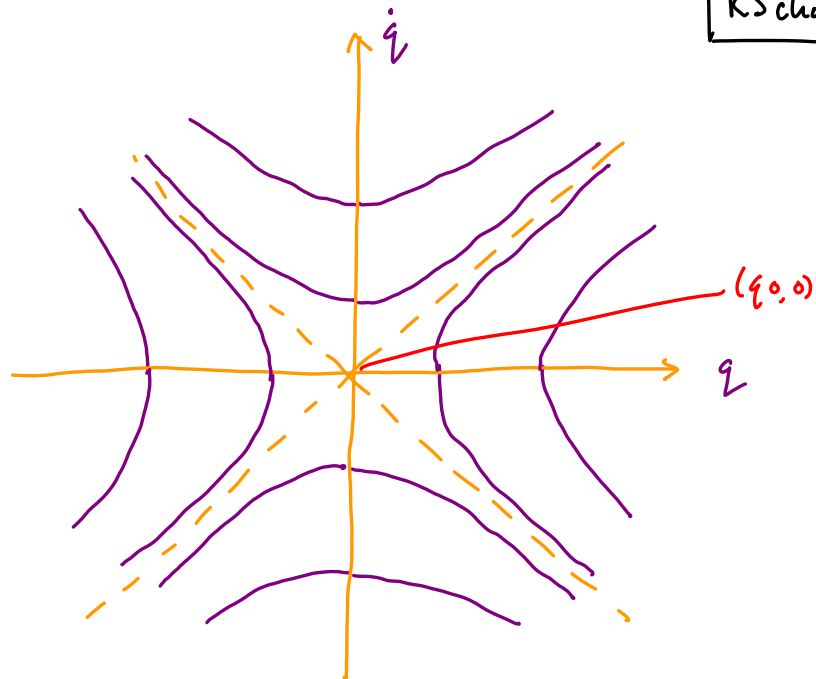


$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

System folgt Hyperbel
im Phasenraum

"Hyperbolischer
Fixpunkt"

KSchw 16

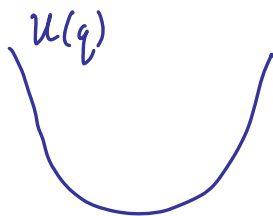
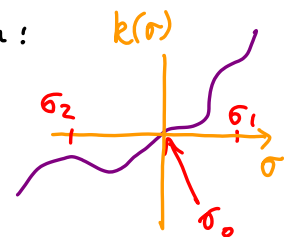


Harmonische Näherung nur für kurze Zeiten OK.
($\omega_0 t \lesssim 1$)

Betrachte $U = U(q, \sigma)$, mit σ = Verstellbarer Parameter KSchw 17

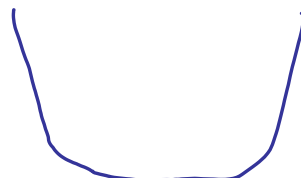
Änderung v. σ kann Charakter des Fixpunkts ändern:

Harmonische Näherung: $U(q, \sigma) = \frac{1}{2} k(\sigma) x^2$



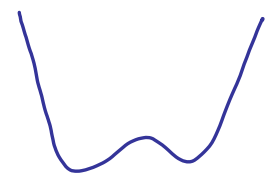
$k(\sigma_1) > 0$

stabiler
Fixpunkt



$k(\sigma_0) = 0$

kritischer (oder marginaler)
Fixpunkt



$k(\sigma_2) < 0$

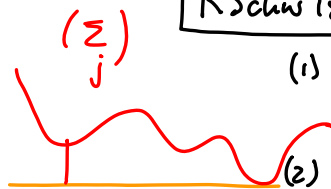
instabiler
Fixpunkt

→
"Bifurkation"

Zurück zur allg. Gleichung:

$$T_{ij} \ddot{x}_j + V_{ij} x_j \stackrel{(13.3)}{=} 0$$

| K Schw 18
(1)



Bedingung für stabiles Gleichgewicht:

$$U(q_0) < U(q_0 + x)$$

f. alle genügend kleine x

(19.3)

$$0 < \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i V_{ij} x_j$$

(3)

Transformiere zur Eigenbasis von V:

$$\tilde{V} = \tilde{D}^{-1} V D = \text{diagonal.}$$

$$\tilde{x} = \tilde{D}^{-1} x$$

$$\begin{aligned} & x^T D D^{-1} V D D^{-1} x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \tilde{x}_i \underbrace{\tilde{V}_{ij}}_{\delta_{ij} \tilde{V}_i} \tilde{x}_j \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \tilde{V}_i \tilde{x}_i^2 \Rightarrow \tilde{V}_i > 0 \quad (4)$$

(3) erfordert:

Eigenwerte v. V sind positiv!

"V ist positiv-definite Matrix" (T auch)

(5)

Allg. Lösungsverfahren für Gl. (18.1):

$$\hat{T}_{ij} \ddot{x}_j + \hat{V}_{ij} x_j = 0$$

| K Schw 19
(1)

Betrachte $x(t) = \text{Re}[X(t)]$,

$$\hat{T}_{ij} \ddot{X}_j + \hat{V}_{ij} X_j = 0$$

(2)

Komplexer Lösungsansatz

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \\ x \end{pmatrix} \sim x^2$$

$$X(t) = A e^{-i\omega t}$$

komplexer Spaltenvektor

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_f \end{pmatrix} \quad (3)$$

(3) in (2):

$$e^{-i\omega t} \sum_j (-\omega^2 \hat{T}_{ij} + \hat{V}_{ij}) A_j = 0$$

(4)

Matrix-Notation:

$$(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) A = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Eigenwert-} \\ \text{Problem} \end{array} \right.$$

(5)

Nicht-triviale Lösung erfordert:

$$\det(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \omega^2 & & & \\ & \omega^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^2 \end{vmatrix} \quad (6)$$

charakteristisches Polynom: (z.B. 5.4)

$$P^{(f)}(\omega^2) = 0$$

(7)

Polynom von Grad f mit reellen Koeffizienten

Nullstellen v. $P^{(f)}$, $\omega_{(\alpha)}^2$, $\alpha = 1, \dots, f$
 sind die "Eigenfrequenzen" von (19.5)

(1) KSchw20
 [im Allg. ist ω_{α}^2 komplex]

Eigenvektoren $A^{(\alpha)}$
 erfüllen die Gl:

$$\sum_j (V - \omega_{(\alpha)}^2 T) A_j^{(\alpha)} = 0 \quad (2)$$

Entsprechende Lösung
 v. (19.2):

$$X^{(\alpha)}(t) = A^{(\alpha)} e^{-i\omega_{\alpha} t} \quad \text{"Eigenmode, Eigenschwingung"} \quad (3)$$

Falls $\text{Im}(\omega_{\alpha}^2) \neq 0$,
 oder ω_{α}^2 ist neg. reell

dann ist
 entweder $\text{Im} \omega_{\alpha} > 0$
 oder $\text{Im}(-\omega_{\alpha}) > 0$ } also $|X^{(\alpha)}| \rightarrow \infty$
 für $t \rightarrow \infty$ (4)
 $e^{-i(i \text{Im} \omega_{\alpha})t}$ instabiles Gleichgewicht !!

Bedingung f. stabiles
 Gleichgewicht:

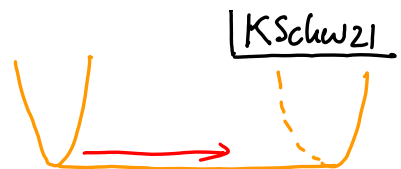
$$(\omega_{\alpha}^2)^* = \omega_{\alpha}^2 \geq 0 \quad \forall \alpha = 1, \dots, f \quad (5)$$

Es kann gezeigt werden, dass (5) auch direkt aus (18.5) folgen

Sonderfall: $\omega^{(\alpha)} = 0$:

dann liefert (28.2)

$$\sum_j V_{ij} A_j^{(\alpha)} = 0 \quad (1)$$



$\Rightarrow$ Potential ändert sich nicht in $A_j^{(\alpha)}$ -Richtung

Setze $x_j = A_j^{(\alpha)} f(t)$
 in (1):

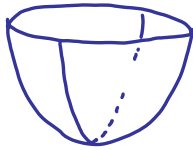
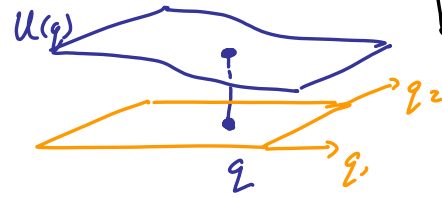
$$0 = T_{ij} \ddot{x}_j = T_{ij} A_j^{(\alpha)} \ddot{f}(t) \quad (2)$$

$$\Rightarrow f(t) = C_1 + C_2 t \quad (3)$$

$\omega^{(\alpha)} = 0 \Rightarrow$ gleichförmige Bewegung statt Oszillationen!
 in $A^{(\alpha)}$ -Richtung

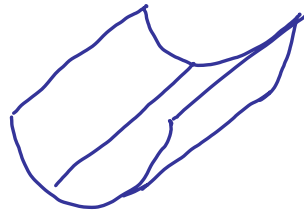
Beispiele für $f=z$:

|K Schwarz



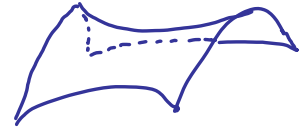
Minimum

$$\omega_1^2 > 0, \omega_2^2 > 0$$



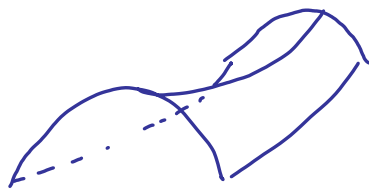
Rinne

$$\omega_1^2 > 0, \omega_2^2 = 0$$



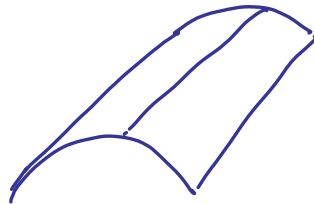
Sattel

$$\omega_1^2 > 0, \omega_2^2 < 0$$



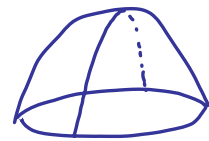
Sattel

$$\omega_1^2 < 0, \omega_2^2 > 0$$



Tunnel

$$\omega_1^2 < 0, \omega_2^2 = 0$$



Maximum

$$\omega_1^2 < 0, \omega_2^2 < 0$$