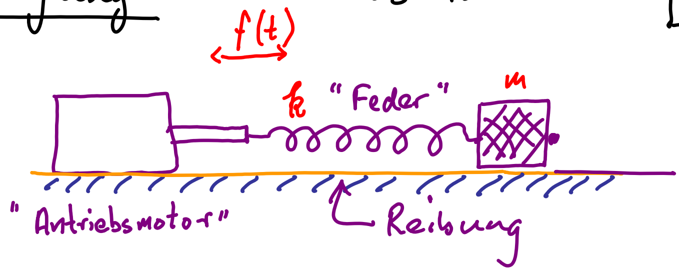
Erzwungene Schwingungen

Getriebener, gedämpfter harmonischer Oszillator



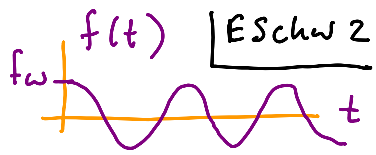
Bewegungsgl.: $$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} f(t) \qquad (1.1)$$

Reibung ($\lambda > 0$) — Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — "Antriebs=kraft"

Ziel: Lösung v. (1.1) für beliebige Antriebsfunktion $f(t)$!

Qualitatives Verständnis der Lösung.

Periodischer Antrieb:



Betrachte: $$f(t) = f_\omega \cos\omega t \qquad (2.1)$$

Bewegungsgl. (1.1): $$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_\omega}{m}\cos\omega t \qquad (2.2)$$

[alle Größen in dieser Gl. sind reell]

Lösungsweg: komplexer Ansatz: betrachte $$\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f_\omega}{m} e^{i\omega t} \qquad (2.3)$$

gesuchte Funktion: $x(t) = \mathrm{Re}[X(t)]$, $\overset{(2.4)}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{Re}(2.3) = (2.2)$ ✓

Allg. Form der Lösung: $$X(t) = X_{hom}(t) + X_{par}(t) \qquad (2.5)$$

X_{hom}: Allgemeine Lösung d. homogenen DG (mit $f=0$)

X_{part}: Partikuläre (irgendeine Lösung) v. (2.2)

Homogene DG: $\ddot{X}_{hom} + 2\lambda \dot{X}_{hom} + \omega_0^2 X_{hom} = 0$ (3.1) ESchw3

Lösungen sind aus der Vorlesung E1 bekannt! Seiten 3 - 6 hier fassen Ergebnisse zusammen, zum Selberlesen!

Lösungsansatz: $X_{hom}(t) = C e^{-i\nu t}$ (3.2)

eingesetzt in (3.1): $\cancel{e^{-i\nu t}}\left[(-i\nu)^2 - 2i\nu\lambda + \omega_0^2\right] = 0$ (3.3)

Aufgelöst nach ν: $\nu_\pm = \pm\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}_{\tilde{\omega}_0} - i\lambda = \pm\tilde{\omega}_0 - i\lambda$ (3.4)

Wir unterscheiden 3 Fälle:

1.) $\omega_0 > \lambda \Rightarrow \tilde{\omega}_0$ = reell

Lösung: $x_{hom}(t) \overset{(3.2)}{=} \mathrm{Re}\left[\overbrace{C_-}^{|C|e^{-i\alpha}} e^{-i\tilde{\omega}_0 t - \lambda t} + \underbrace{C_+}_{|C|e^{+i\alpha}} e^{+i\tilde{\omega}_0 t - \lambda t}\right]$ (3.5)

$C_\pm$ sind Integrationskonstanten

Sei $C_\mp = \frac{|C|}{2} e^{\mp i\alpha}$: ESchw4

2 Integrationskonstanten

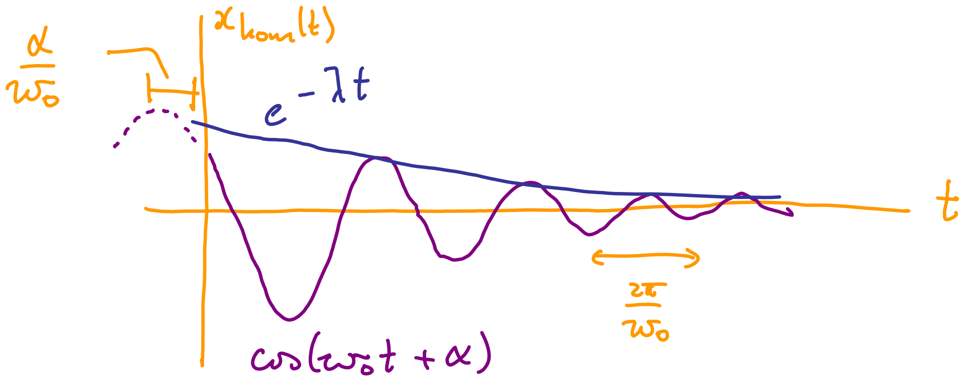
$$\boxed{x_{hom}(t) = e^{-\lambda t}|C|\cos(\tilde{\omega}_0 t + \alpha)} \quad (4.1)$$

alternative Darstellung

$$= e^{-\lambda t}\left[A_1 \cos\tilde{\omega}_0 t + A_2 \sin\tilde{\omega}_0 t\right] \quad (4.2)$$

mit $A_1 = C\cos\alpha$, $A_2 = -C\sin\alpha$ (4.3)

Charakterisierung: $\boxed{\omega_0 > \lambda:\ \text{Gedämpfte periodische Bewegung}}$



2. $\omega_0 < \lambda$:

$$\Rightarrow \pm \bar{\omega}_0 \overset{(3.4)}{=} \pm i \underbrace{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}} \qquad (\bar{\omega}_0 < \lambda)$$

$$= \pm i \bar{\omega}_0 \quad \text{imaginär} \qquad (5.1)$$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$$\Rightarrow \nu_\pm \overset{(3.4)}{=} -i(\mp \bar{\omega}_0 + \lambda) = -i \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases} \qquad (5.2)$$

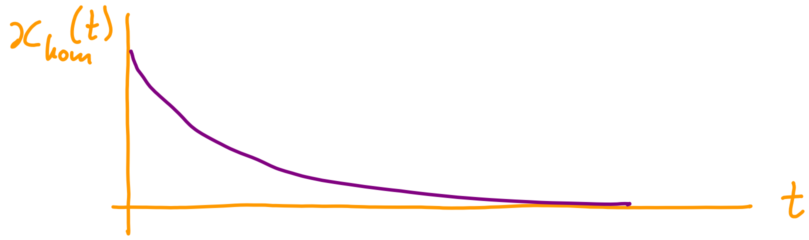
(5.2) in (3.2):

Lösung:

$$\boxed{x_{hom}(t) = A e^{-\lambda_1 t} + B e^{-\lambda_2 t}} \qquad (5.3)$$

2 Integrationskonstanten

Charakterisierung: $\omega_0 < \lambda$: Exponentiell abfallende Bewegung



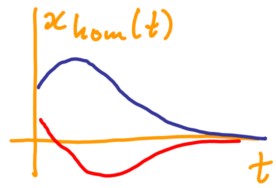
3. $\lambda = \omega_0$

$$\nu_\pm \overset{(3.4)}{=} \pm \sqrt{\cancel{\omega_0^2 - \lambda_0^2}}^{\,=0} - i\lambda = -i\lambda \qquad (6.1)$$

Allgemeine Lösung:

$$\boxed{x_{hom}(t) = (A + Bt)\, e^{-\lambda t}} \qquad (6.2)$$

(beachte den Term linear in t!) 2 Integrationskonstanten



Charakterisierung: Grenzfall aperiodischer Bewegung

Check: $$\overset{①}{\ddot{x}} + \overset{②}{2\omega_0 \dot{x}} + \overset{③}{\omega_0^2 x} \overset{?}{=} 0 \qquad (6.3)$$

∂_t (6.2): $$\dot{x} = e^{-\lambda t}\{B - \lambda A - \lambda B t\} \qquad (6.4)$$

∂_t (6.3): $$\ddot{x} = e^{-\lambda t}\{-\lambda B - \lambda B + \lambda^2 A + \lambda^2 B t\}$$

Eingesetzt in (6.3):
mit $\omega_0 = \lambda$:

$$e^{-\lambda t}\Big[Bt\big(\overset{①}{\lambda^2} - \overset{②}{2\omega_0\lambda} + \overset{③}{\omega_0^2}\big)_{=0} + \overset{①}{(\lambda^2 A - 2\lambda B)} + \overset{②}{2\omega_0 (B - \lambda A)} + \overset{③}{\omega_0^2 A} \Big] = 0 \;\checkmark$$

Partikuläre Lösung von (2.3):

ESchw 7

Nicht-homogene Dg: $\ddot{X}_{part} + 2\lambda \dot{X}_{part} + \omega_0^2 X_{part} = \frac{f_\omega}{m} e^{i\omega t}$ (2.3)

Ansatz: $$\boxed{X_{part}(t) = \frac{f_\omega}{m} \chi(\omega) e^{i\omega t}}$$ (7.1)

(7.1) eingesetzt in (2.3): $$\cancel{\frac{f_\omega}{m}} \chi(\omega) \left[-\omega^2 + 2\lambda i\omega + \omega_0^2 \right] \cancel{e^{i\omega t}} = \cancel{\frac{f_\omega}{m}} \cancel{e^{i\omega t}}$$ (7.2)

"Dynamische Suszeptibilität": $$\boxed{\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\lambda}}$$ (7.3)

$\left[\chi(0) = \frac{1}{\omega_0^2} \right.$ "statische Susz." $\left. \right]$

Suszeptibilität $\overset{(7.1)}{=} \frac{\text{Reaktion}}{\text{äußere Störung}} = \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Antrieb}}$ $\leftarrow \frac{X_{part}}{\frac{f_\omega}{m} e^{i\omega t}}$ (7.4)

Eigenschaften v. Suszeptibilität:

ESchw 8

$$\chi(\omega) \equiv |\chi(\omega)| e^{i\delta(\omega)}$$ (8.1)

$a = \omega_0^2 - \omega^2$

$b = 2\omega\lambda$

$$= \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$ (8.2)

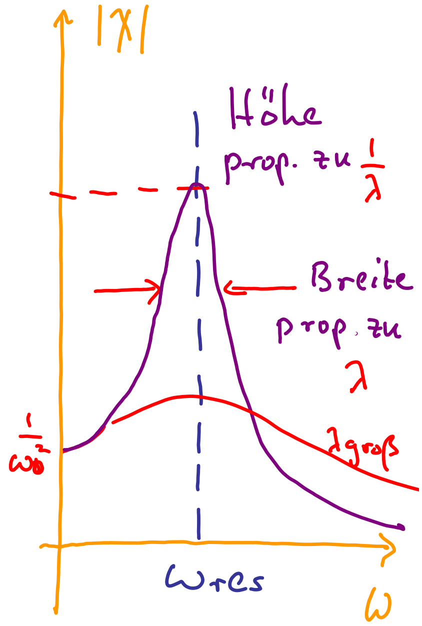
Betrag:

$$|\chi| = \left[\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2} \right]^{1/2} = \frac{1}{[a^2 + b^2]^{1/2}}$$ (8.3)

$$\boxed{|\chi| = \frac{1}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2 \right]^{1/2}}}$$ (8.4)

Resonanz-Frequenz: $\boxed{\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}}$ (8.5)

(wo Nenner = minimal)



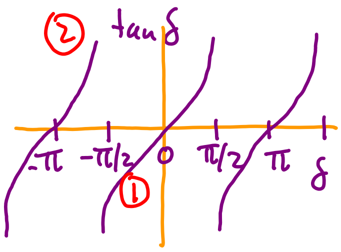
Bei $\omega \simeq \omega_{res}$: $|\chi| \to$ maximal

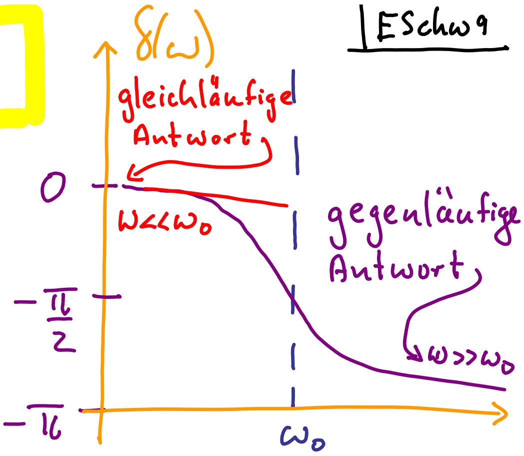
$\to$ kleine Antriebskraft $\Rightarrow$ große Reaktion

Phasen-Verschiebung: $\boxed{\tan\delta(\omega) = -\frac{b}{a} = \frac{2\omega\lambda}{\omega^2-\omega_0^2}}$

$\omega < \omega_0$: $\tan\delta(\omega) < 0$, ①

$\omega > \omega_0$: $\tan\delta(\omega) > 0$, ②



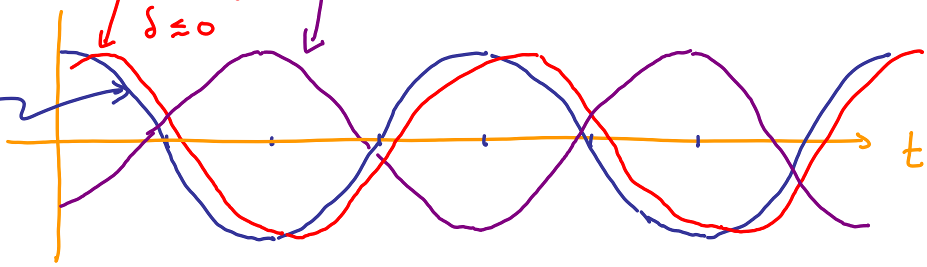


$|\chi| e^{i\delta(\omega)}$

$$\mathrm{Re}\left[\chi(\omega)\, e^{i\omega t}\right] = |\chi(\omega)| \cos(\omega t + \delta(\omega))$$

$\omega \ll \omega_0$, $\delta \approx 0$ $\qquad$ $\omega \gg \omega_0$

$\mathrm{Re}\left[f_\omega e^{i\omega t}\right] = f_\omega \cos\omega t$



Zusammenfassung: erzwungene Schwingungen

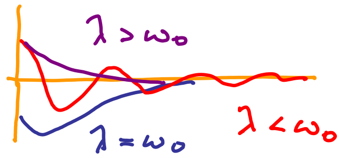
(V14) 23.6.05 | ESchw 10

Bewegungsgl.: $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_\omega}{m}\cos\omega t$ (10.1)

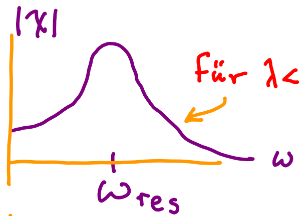
Komplexer Ansatz: $\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f_\omega}{m} e^{\pm i\omega t}$ (10.2)

Allg. Form der Lösung: $X(t) = X_{hom}(t) + X_{par}(t)$ (10.3)

Homogene Lösung fällt exponentiell ab: $X_{hom}(t) = e^{-\lambda t}\ldots$ (10.4)



Partikuläre Lösung: $X_{part}(t) = \frac{f_\omega}{m}\chi(\omega)\, e^{\pm i\omega t}$ (10.5)
(fällt nicht ab!)



"Dynamische Suszeptibilität": $\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm 2i\omega\lambda}$ (10.6)

$= |\chi(\omega)| e^{i\delta(\omega)}$

Allgemeiner Antrieb: beliebige Funktion $f(t)$ in:

Allg. Bwgsgl: $$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m} \qquad (11.1)$$

Fourier-transformierte

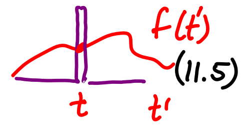
Fließbach benutzt hier +

Fourier-Transf: $$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \underline{f_\omega}\, e^{-i\omega t} \qquad (11.2)$$

Umkehr-Transf: $$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t')\, e^{i\omega t'} \qquad (11.3)$$

Check: (11.3) in (11.2): $$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \underbrace{\int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\, e^{i\omega t'}}_{\delta(t-t')} f(t') \qquad (11.4)$$

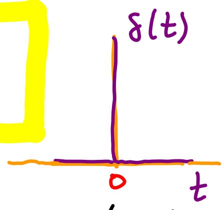
Dirac-δ Funktion



Definierende Eigenschaft v. δ-Funktion:
$$= \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \delta(t-t')\, f(t')} \qquad (11.5)$$
$$= \boxed{f(t) = (11.2)} \qquad (11.6)$$

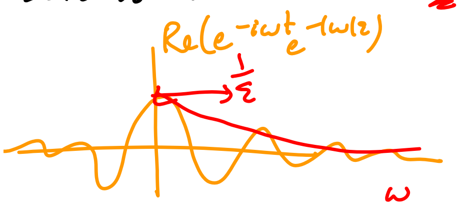
// Einschub: δ-Delta-Funktion

Eine mögliche Darstellung: $\varepsilon > 0$
$$\boxed{\int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t} = \lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t)} \qquad (12.1)$$



Verbreiterte Lorentz-Funktion:
$$\delta_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t - |\omega|\varepsilon} \qquad (12.2)$$

Dämpfungsfaktor

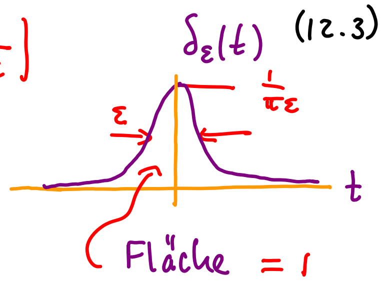


$$= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\left[e^{-\omega[it+\varepsilon]} + e^{-\omega[-it+\varepsilon]}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left.\frac{e^{-\omega(it+\varepsilon)}}{-(it+\varepsilon)}\right|_0^\infty + \left.\frac{e^{-\omega(-it+\varepsilon)}}{-(-it+\varepsilon)}\right|_0^\infty\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{it+\varepsilon} + \frac{1}{-it+\varepsilon}\right] \qquad (12.3)$$

$$= \frac{\varepsilon/\pi}{\varepsilon^2 + t^2} \qquad (12.4)$$



Normierung: $$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta_\varepsilon(t) = 1 \;\checkmark \qquad (12.5)$$

\\ Ende Einschub

ESchw13

Zurück zu (11.1): $\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f(t)}{m}$ (13.1)

mit $x = Re[X]$: $(\partial_t^2 + 2\lambda\partial_t + \omega_0^2)X$

analog zu (11.2)

Fourier-Ansatz für Lösung: $X(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} X_\omega \, e^{-i\omega t}$ (13.2)

(13.2), (11.2) in (13.1):

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \underbrace{\left[\partial_t^2 + 2\lambda\partial_t + \omega_0^2\right]}_{\left[-\omega^2 - 2\lambda i\omega + \omega_0^2\right]} X_\omega \, e^{-i\omega t} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t}$$

X_ω, $\frac{f_\omega}{m}$ hängt nicht von t ab! (11.3)

(11.3) gilt für beliebige f_ω; beliebige f:

$$X_\omega = \frac{f_\omega/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega} \quad (13.4)$$

eingesetzt in (13.2) liefert gesuchte Lösung $X(t)$

Dynamische Suszeptibilität:

$$\chi(\omega) = \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Antrieb}} = \frac{X_\omega}{f_\omega/m} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega} \quad (13.5)$$

= (7.3) mit $\omega \to -\omega$ (wegen 7.1)

Antwort auf eine δ-Kraft:

ESchw14

Sei $f(t) = m\,\delta(t)$ (14.1)

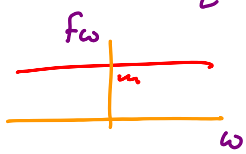
$\delta(t - t_0)$

Fourier-Transf. (11.3): $f_\omega = \int dt\, e^{i\omega t} f(t)$

$\delta(0-t) = \delta(t-0)$

$$= \int dt\, e^{i\omega t}\, m\,\delta(t) = m\, e^{i\omega \cdot 0}$$

(14.2) $= m\, e^{i\omega t_0}$



Eingesetzt in (13.4), $X(\omega) \equiv X_\omega$:

$$X(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega} = -\frac{1}{(\omega - \nu_+)(\omega - \nu_-)} \quad (14.3)$$

Lösung für $t>0$: (13.2) $X(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} X(\omega)$

siehe (3.4)

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}\, e^{i\omega t_0}}{(\omega - \nu_+)(\omega - \nu_-)} \quad (14.4)$$

Finde 0-Stellen: $\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega = -(\omega - \nu_-)(\omega - \nu_+)$ (15.1) **ESchw15**

$\nu_\pm = \pm\tilde{\omega}_0 - i\lambda$, mit $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\underbrace{\omega_0^2 - \lambda^2}_{>0}}$ (15.2)

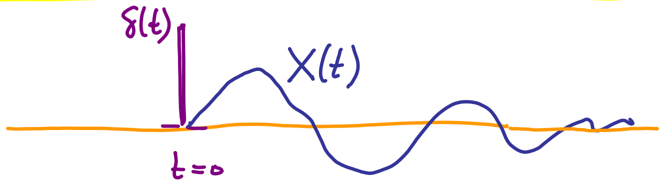
Check:

$$-(\omega - \nu_-)(\omega - \nu_+) = -\left[\omega^2 - \omega(\nu_+ + \nu_-) + \nu_-\nu_+\right]$$
$$= -\left[\omega^2 + 2i\lambda\omega + (-\tilde{\omega}_0 - i\lambda)(\tilde{\omega}_0 - i\lambda)\right]$$
$$= -\left[\omega^2 - 2i\lambda\omega - \tilde{\omega}_0^2 - \lambda^2\right] = -\omega^2 - 2i\lambda\omega + \omega_0^2 \checkmark$$

für $\omega_0 > \lambda$

(15.1), (15.2) in (14.4), Integral lösen (mittels Bronstein)

$$\boxed{X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le \underset{t_0}{0} \\ \frac{1}{\tilde{\omega}_0}\sin\tilde{\omega}_0 t\, e^{-\lambda t} & \text{für } t > \overset{t_0}{0} \end{cases}}$$



Fazit:

$$(\partial_t^2 + 2i\gamma\partial_t + \omega_0^2)X = \delta(t) \quad (16.1)$$

ESchw16

hat die Lösung (für $\omega_0 > \lambda$):

$$G(t) = X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ \frac{1}{\tilde{\omega}_0}\sin\tilde{\omega}_0 t\, e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (16.2)$$

Greensche Funktion: Antwort auf δ-Kraft wird "Greensche Funktion" genannt. Sie ist sehr nützlich! z.B., liefert formalen Ausdruck für Antwort auf beliebigen Antrieb:

Betrachte:
$$(\partial_t^2 + 2i\gamma\partial_t + \omega_0^2)X(t) = \frac{1}{m}f(t) \quad (16.3)$$

Allg. Ausdruck für Lösung: (sehr nützlich)

$$\boxed{X(t) = X_{hom}(t) + \int dt'\, G(t-t')\frac{1}{m}f(t')} \quad (16.4)$$

Check:
$$\left[\partial_t^2 + 2i\gamma\partial_t + \omega_0^2\right]X = 0 + \int dt'\, \delta(t-t')\frac{1}{m}f(t')$$
$$= \frac{1}{m}f(t) = (16.3) \checkmark$$