L3

2. Lösungsmethoden:

(a) Lagrange-Methode 1. Art:

Hier: (2.1)

(b) Lagrange-Methode 2. Art:

Hier: $\vec{r}: \approx$ (2.2)

löse (2.3)

Lagrangeformalismus

(v9) 14.05.07 L1

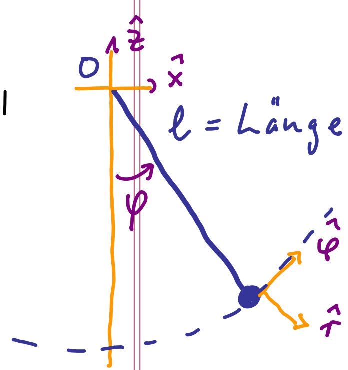
Lagrangegleichungen 1. Art

Newton: Kraft $\vec{K}^{tot}$ gegeben; löse N2: (1.1)

Aber: Oft treten Zwangskräfte auf, die erst durch Bewegung geweckt werden.

Gesamtkraft: $\vec{K}^{tot} =$ (1.2)

<u>Beispiel:</u>
Ebenes Pendel



Newton: (1.3)

Zwangs-
Bedingung (ZB): (1.4)

L4

R Zwangsbedingungen:

(4.1)

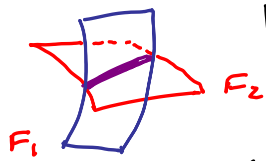
Anzahl freier Parameter
("Freiheitsgrade"):

Beispiel: 2 Massen am Stab:

Beispiel: Wippe:

L3

Zwangsbedingungen (ZB): [Verallg. von (L4)]



Betrachte 1 Teilchen in $\mathbb{R}^3$:

1. ZB: definiert 2D-Fläche "F1" in 3D-Raum (3.1)

2. ZB: definiert noch eine Fläche, "F2", in 3D-Raum (3.2)

Beispiel:
für ebenes Pendel: (3.3)

Allgemein: R Zwangsbedingungen für N Teilchen in $\mathbb{R}^3$;

Notation: $x := (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$ (3.4)

3N Koordinaten: $:= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N})$ (3.5)

L6

Holonome Zwangskräfte (ZK):

Holonome ZB $\quad g_\alpha(x,t) = 0 \qquad (6.1)$

zwingt Bewegung in eine (3N-R)-dimensionale Hyperfläche (HF) hinein, doch innerhalb HF liefert sie keine Einschränkung auf Bewegung

Entsprechende ZK hängt von Bewegung ab; sie zwingt Bewegung, innerhalb HF zu verlaufen.

$\Rightarrow$ Holonome Zwangskraft $\quad$ Hyperfläche $\qquad (6.2)$

Ansatz für ZK (für N=1): $\qquad (6.3)$

Sei: $\vec{x}, \vec{x}' \in HF$

$\vec{x}' := \vec{x} + \delta\vec{x}$

Motivation:

HF ist definiert durch: $\quad g_\alpha(\vec{x},t) = 0$

Richtung : $\quad \vec{\nabla} g_\alpha(\vec{x},t)$:

Betrag v. $|\vec{Z}|$: wird durch $\qquad$ so eingestellt, dass Bwg. (trotz äußerer Kräfte) in HF bleibt

L5

Klassifikation v. Zwangsbedingungen:

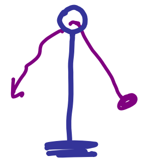
"Holonome ZB": (Geschw. kommen nicht vor) $\quad g_\alpha(x,t) = 0 \quad (5.1)$

"skleronom" (zeitunabhängig) $\quad (5.2)$

"reonom" (zeitabhängig) $\quad (5.3)$

"Anholonome" oder "nicht-holonome" ZB: (im folgenden nicht weiter diskutiert) $\quad$ alles andere, z.B.

$g_\alpha(x,\dot{x},t) = 0 \qquad$ (Geschw.-abhängig) $\quad (5.3)$



$g_\alpha(x,t) \leq 0 \qquad$ (Ungleichheit) $\quad (5.4)$

Bewegungsgleichung mit Zwangsbedingungen: L8

(6.3) eingesetzt in N2: $m\ddot{\vec{r}} \overset{(1.2)}{=} \vec{K}^{ext} + \vec{Z}$ (8.1)

$\overset{(6.3)}{=}$ (8.2)

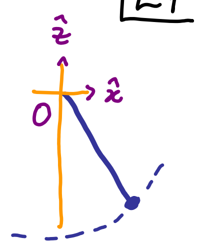
ZB: (8.3)

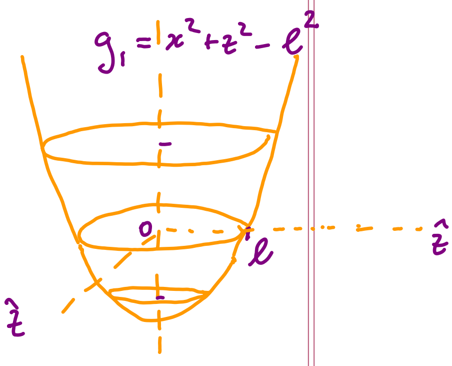
(8.2), (8.3) sind Gleichungen mit Unbekannten

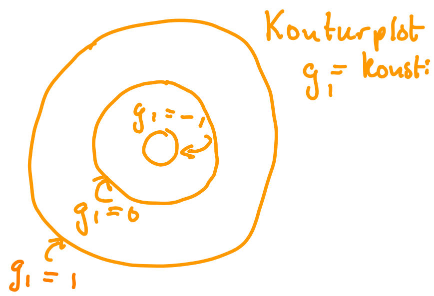
Durch Lösung dieser Gleichungen können alle Unbekannten bestimmt werden.

<u>Beipspiel:</u> ebenes Pendel L7

Hyperfläche F1: $g_1(x, y, z, t) =$ (7.1)





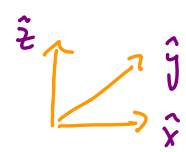


(7.2)

(Radiusvektor in x-z-Ebene)

Zwangskraft 1: (7.3)

Hyperfläche F2: $g_2(x, y, z, t) =$ (7.4)



(7.5)

Ende v. Beispiel

L 10

Beispiel für N = 2 mit einer ZB $(\alpha = 1)$:

ZK auf Teilchen 1, 2

Notation für Zwangskräfte: (allgemein Z_α^n)

$$(Z_1^1, Z_1^2, Z_1^3) \equiv \vec{Z}^{(1)}, \quad (Z_1^4, Z_1^5, Z_1^6) \equiv \vec{Z}^{(2)} \tag{10.1}$$

Sei $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t)$ (10.2)

(z.B. sei Abstand festgelegt:)

$$= \tag{10.3}$$

ZK auf Teilchen 1: $\vec{r}_1 = (x_1, x_2, x_3)$

$$\vec{Z}^{(1)} = \tag{10.4}$$

ZK auf Teilchen 2: $\vec{r}_2 = (x_4, x_5, x_6)$

$$\vec{Z}^{(2)} = \tag{10.5}$$

$$\overset{(10.2)}{=} \tag{10.6}$$

$\vec{\nabla}_1 g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{\nabla}_2 g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

N3 wird reproduziert!

L 9

Verallgemeinerung auf beliebiges N: (3N Freiheitsgrade, n = 1, ..., 3N)

R Zwangsbedingungen: $\boxed{g_\alpha(x, t) = 0,}$ (9.1)

Ansatz für Zwangkraft (in $\hat{e}_n$ -Richtung): $Z_\alpha^n =$ (9.2)

(9.2) eingesetzt in N2: (9.3)

(9.1) und (9.3) bilden die "Lagrange-Gl. 1. Art": Gleichungen für Unbekannte

L11b

Lösungsrezept mit Lagrange-Gl. 1. Art (LG1):

1. Formulierung der ZB: (11.1)
2. Aufstellung der LG1: (11.2)
3. Eliminierung der
4. Lösung der Bewegungsgl. für
5. Bestimung der Integrationskonstanten (so, dass ZB und Anfangsbedingungen erfüllt sind)
6. Bestimmung der Zwangskräfte, via
7. Diskussion !! (11.3)

L11a

Erhaltungssätze

Falls ZB Symmetrien verletzen, gelten entsprechende Erhaltungsätze nicht mehr.

Impulserhaltung:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = \vec{K} + \vec{Z} \overset{\text{falls}}{=} 0 \text{, dann } \vec{p} = \text{konst.} \quad (11.1)$$

Drehimpulserhaltung:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times (\vec{K} + \vec{Z}) \overset{\text{falls}}{=} 0 \text{, dann } \vec{L} = \text{konst} \quad (11.2)$$

Energieerhaltung (für konservative Kräfte ~~Kn~~):

$$(T + U) = \sum_n \left[\frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 + U_n(x_n(t))\right] \quad (11.3)$$

$$= \sum_n \left[\qquad \right] \quad (11.4)$$

Aber: $0 = g_\alpha(x,t)$

$0 = \frac{d}{dt} g_\alpha(x,t)$ (11.5)

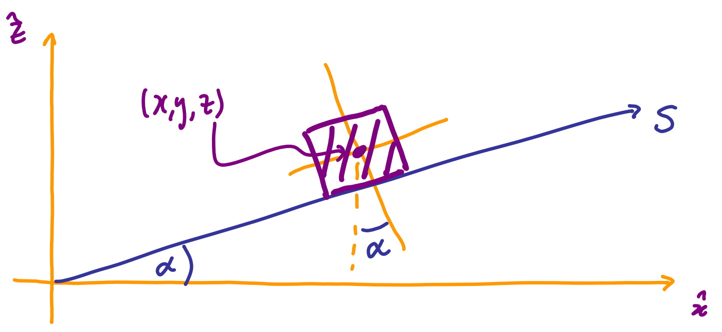
$$= \sum_n \dot{x}_n \left[\qquad \right] = \sum_n \sum_\alpha$$

(11.6)

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T+U) = \qquad} \quad (11.7)$$

Fazit: Energie-Erhaltung, falls ZB nicht explizit zeitabhängig sind (11.8)

Beispiel: Reibungsfreies gleiten auf schiefer Ebene $\lfloor$L13



(13.1)

Schritt 1:
(Formulierung der ZB) $g_1(\vec{r},t) =$ (13.1a)

$g_2(\vec{r},t) =$ (13.1b)

Schritt 2:
(Aufstellung der LG1) $m\ddot{\vec{r}} =$ (13.2)

$m_n\ddot{x}_n = K_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha$ $=$ (13.3)

Schritt 3 im Allgemeinen: Eliminierung der λ_α: $\lfloor$L12

Eliminiere zunächst $\ddot{x}_n$: (11.2) $$m_n \ddot{x}_n = K_n(x,\dot{x},t) + \underbrace{\sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha}_{Z_n} \quad (12.1)$$

$$\frac{d}{dt}(11.1) \qquad 0 = \frac{d}{dt} g_\alpha(x,t) = \quad (12.2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(11.1) = \frac{d}{dt}(12.2) \qquad 0 = \quad (12.3)$$

Eliminiere $\ddot{x}_n$ aus (12.1) und (12.3): $(\alpha = 1,\dots,R)$
$$F_\alpha = \sum_n (\partial_n g_\alpha) \frac{1}{m_n}\left[K_n + \sum_\beta \lambda_\beta (\partial_n g_\beta)\right] \quad (12.4)$$

Dies ist ein lineares, inhomogenes Gleichungssystem für die R Größen λ_α (12.5)
Kann im Prinzip gelöst werden; allgemeine Form der Lösung: $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(x,\dot{x},t)$

(12.5) in (12.1): $$m_n \ddot{x}_n = K_n(x,\dot{x},t) + Z_n(x,\dot{x},t) \quad (12.6)$$
$$Z_n(x,\dot{x},t) = \sum_\alpha \lambda_\alpha(x,\dot{x},t)\, \partial_n g(x,t)$$

Rechte Seite ist bekannte Funktion v. $x, \dot{x}, t$; lösen durch Integration...

L15

(14.5) in (14.1):

$$m\ddot{x} = \overbrace{\qquad\qquad}^{\lambda_1} \sin\alpha \qquad (15.1)$$

$$m\ddot{y} = 0$$

$$m\ddot{z} = -mg - \overbrace{\qquad\qquad}^{\lambda_1} \cos\alpha \qquad (15.2)$$

$$= -mg(1 - \cos^2\alpha) = \qquad (15.3)$$

Schritt 4:
(Lösen der Bewegungs-Gl. für x_n)
[Für dieses Beispiel ziemlich trivial...]

$$x(t) \overset{(15.1)}{=} -\frac{1}{2}t^2 g \cos\alpha \sin\alpha + a_1 t + a_2 \qquad (15.4)$$

$$y(t) = b_1 t + b_2 \qquad (15.5)$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}t^2 g \sin^2\alpha + c_1 t + c_2 \qquad (15.6)$$

L14

(13.5) in Komponenten:

$$m\ddot{x} = \qquad (14.1a)$$

$$m\ddot{y} = \qquad (14.1b)$$

$$m\ddot{z} = \qquad (14.1c)$$

Schritt 3:
(Elimination v. λ_α)

$$(12.3):\quad 0 = \qquad (14.2)$$

(14.1) eingesetzt:
[entspricht (12.4)]

$$= \qquad (14.3)$$

Auflösen nach λ_1:
[entspricht (12.5)]

$$\lambda_1 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \qquad (14.4)$$

Analog für $g_z = 0$:

$$0 = \frac{d^2}{dt^2} g_z \overset{(13.16)}{=} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \qquad (14.5)$$

Nun sind also λ_1 und λ_2 bekannt.

L17

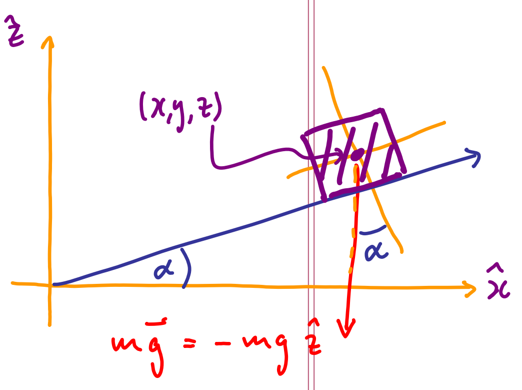
Schritt 6: (Bestimmung der Zwangskräfte) (11.3)

$$Z^n_\alpha = \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha \quad (17.1)$$

$$\vec{Z}_1 = \qquad |Z_1| = \quad (17.2)$$

$$= \quad (17.3)$$

$$(17.4)$$



$$\vec{Z}_1 =$$

check: $= -m(-g\hat{e}_z)\cdot(-\hat{e}_x \sin\alpha + \hat{e}_z \cos\alpha)\,\hat{S}_\perp$

$$= mg\cos\alpha\,(-\hat{e}_x \sin\alpha + \hat{e}_z \cos\alpha) \checkmark$$

$$= (17.4)$$

Schritt 7: Diskussion $\vec{Z}_1$ kompensiert Schwerkraftanteil $\perp$ zur schiefen Ebene [siehe (17.4)]

L16

Schritt 5: Bestimmung der Integrationskonst., so, dass ZB und Anfangsbedingungen erfüllt sind.

ZB (13.1) für alle t: $\quad x \sin\alpha = z\cos\alpha, \quad y = 0 \quad (16.1)$

t^2- Terme heben sich weg:

$$(a_1 t + a_2)\sin\alpha = (c_1 t + c_2)\cos\alpha \quad (16.2)$$

Ansatz zur Lösung v. (16.2):

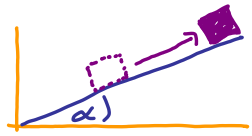
$$a_1 = v_0 \cos\alpha, \quad c_1 = v_0 \sin\alpha \quad (16.3)$$

$$a_2 = s_0 \cos\alpha, \quad c_2 = s_0 \sin\alpha \quad (16.4)$$

Eingesetzt in (15.6)

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \quad \cos\alpha \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= \quad \sin\alpha \end{aligned}\right\} \text{mit} \quad (16.5)$$

$s(t) = \{$ zurückgelegter Abstand entlang $\hat{S}$-Achse



<u>Bemerkung:</u>

Bewegung entlang der $\hat{s}$ -Achse löst die effektive Bewegungs-Gleichung:

$$s(t) \overset{(16.5)}{=} -\frac{1}{2}t^2 g \sin\alpha + v_0 t + s_0 \qquad (18.1)$$

$$(\hat{e}_x \cos\alpha + \hat{e}_z \sin\alpha) \qquad (18.2)$$

Kraft $\parallel$ zur Ebene

s(t) ist eine "<u>verallgemeinerte Koordinate</u>";

mit dem Ansatz

$$x(t) = s(t)\cos\alpha$$

$$y(t) = 0$$

$$z(t) = s(t)\sin\alpha$$

wäre (18.2) sofort aus N2, $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$ gefolgt, <u>ohne</u> dass es nötig gewesen wäre, Zwangskräfte zu berechnen.

Moral v.d. Geschichte: suche zunächst verallg. Koordinaten!!