Lagrangeformalismus

(v9) 14.05.07

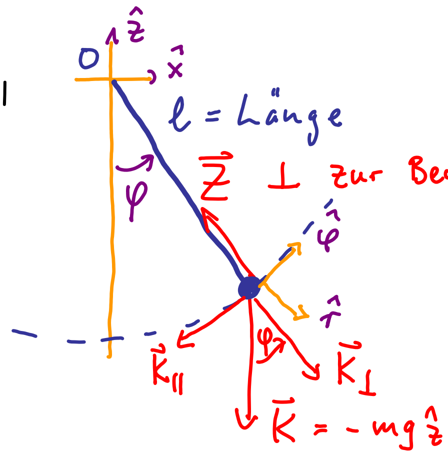
Lagrangegleichungen 1. Art

Newton: Kraft $\vec{K}^{tot}$ gegeben; löse N2: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}^{tot}$ (1.1)

Aber: Oft treten Zwangskräfte auf, die erst durch Bewegung geweckt werden.

Gesamtkraft: $\vec{K}^{tot} = \vec{K}^{ext} + \vec{K}^{Zwang} \equiv \vec{K} + \vec{Z}$ (1.2)

<u>Beispiel:</u>
Ebenes Pendel



Newton: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \vec{Z}$ (1.3)

Zwangs-Bedingung (ZB): $g(\vec{r}) := \vec{r}^{\,2} - \ell^2 = 0$ (1.4)

2. Lösungsmethoden:

(a) Lagrange-Methode 1. Art: bestimme $\vec{Z}$ explizit, und löse (1.3) für $\vec{r}(t)$

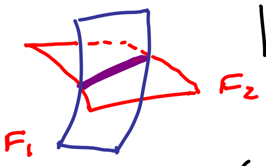
Hier: $\vec{Z} = Z(x,z)\,\hat{r}$ (2.1)

(b) Lagrange-Methode 2. Art: erfülle ZB identisch, durch Wahl geeigneter Koordinaten, löse deren Bwgsgl.

Hier: $\vec{r} := \ell\sin\varphi\,\hat{x} - \ell\cos\varphi\,\hat{z}$ (2.2)

löse $m\ddot{\varphi} \overset{N2}{=} \ldots$ für $\varphi(t)$ (2.3)

Zwangsbedingungen (ZB): [Verallg. von (L4)]



Betrachte 1 Teilchen in $\mathbb{R}^3$:

1. ZB: $g_1(\vec{r}, t) = 0$ definiert 2D-Fläche "F1" in 3D-Raum (3.1)

2. ZB: $g_2(\vec{r}, t) = 0$ definiert noch eine Fläche, "F2", in 3D-Raum (3.2)

} definiert Kurve

Beispiel:
für ebenes Pendel: $g_1 = x^2 + z^2 - \ell^2 = 0 \;, \quad g_2 = y = 0$ (3.3)

Allgemein: R Zwangsbedingungen für N Teilchen in $\mathbb{R}^3$:

Notation: $x := (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$ (3.4)

3N Koordinaten: $:= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N})$ (3.5)

$\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \ldots \hat{e}_{3N}\}$ Komponenten: x_n, $n = 1, \ldots, 3N$

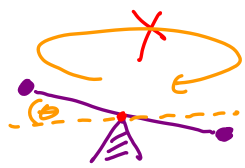
R Zwangsbedingungen: $g_\alpha(x, t) = 0 \;, \quad \alpha = 1, \ldots, R$ (4.1)

Anzahl freier Parameter ("Freiheitsgrade"): $f = 3N - R$

Beispiel: 2 Massen am Stab:
$N = 2$

Abstand fest:
$f = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

Beispiel: Wippe:



Abstand, und SP fest.
$f = 3 \cdot 2 - 1 - 3 = 2$

falls Wippebene fest:
$f = 6 - 1 - 3 - 1 = 1$

Klassifikation v. Zwangsbedingungen:

L5

"Holonome ZB": (Geschw. kommen nicht vor)

$$g_\alpha(x,t) = 0 \qquad (5.1)$$

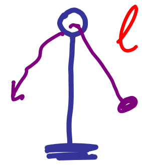
falls $\partial_t g_\alpha(x,t) = 0$ "skleronom" (zeitunabhängig) (5.2)

$\partial_t g_\alpha(x,t) \neq 0$ "reonom" (zeitabhängig) (5.3)

"Anholonome" oder "nicht-holonome" ZB: (im folgenden nicht weiter diskutiert)

alles andere, z.B.

$$g_\alpha(x,\dot{x},t) = 0 \qquad \text{(Geschw.-abhängig)} \quad (5.3)$$



$\ell = \ell(t)$

$$g_\alpha(x,t) \leq 0 \qquad \text{(Ungleichheit)} \quad (5.4)$$

$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \leq \ell$

$\otimes$ $\quad g_\alpha(\vec{x} + \delta\vec{x})$

$$g_\alpha(x_1 + \delta x_1,\; x_2 + \delta x_2,\; x_3 + \delta x_3)$$

$$= g_\alpha(x_1,x_2,x_3) + \delta x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) + \delta x_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) + \delta x_3 \frac{\partial g}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)$$

$$+ (\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2 + \ldots$$

$$\delta x_1 \, \delta x_2 + \ldots$$

$$= g_\alpha(x_1,x_2,x_3) + \vec{\delta x} \cdot \vec{\nabla} g$$

$$\vec{\delta x} = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$$

$$\vec{\nabla} g = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} g, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_3}\right)$$

Holonome Zwangskräfte (ZK):

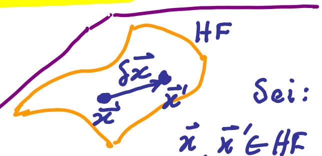
Holonome ZB $\quad g_\alpha(x,t) = 0 \quad$ (6.1)

zwingt Bewegung in eine (3N-R)-dimensionale Hyperfläche (HF) hinein, doch innerhalb HF liefert sie keine Einschränkung auf Bewegung

Entsprechende ZK hängt von Bewegung ab; sie zwingt Bewegung, innerhalb HF zu verlaufen.

$$\Rightarrow \boxed{\text{Holonome Zwangskraft} \perp \text{Hyperfläche}} \qquad (6.2)$$

Ansatz für ZK (für N=1): $\quad \vec{Z}_\alpha = \lambda_\alpha(t)\, \vec\nabla g_\alpha(\vec{x},t) \quad$ (6.3)



Sei: $\vec{x}, \vec{x}' \in HF$, $\vec{x}' = \vec{x} + \delta\vec{x}$

$$0 = g_\alpha(\vec{x},t) = g_\alpha(\vec{x}',t) = g_\alpha(\vec{x}+\delta\vec{x},t) = g_\alpha(\vec{x}) + \delta\vec{x}\cdot\vec\nabla g_\alpha(\vec{x},t) \quad (*)$$

$\delta\vec{x}\cdot\vec\nabla g_\alpha = 0 \qquad \vec\nabla g_\alpha \perp HF$

Motivation:

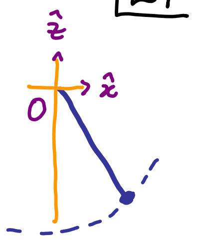
HF ist definiert durch: $\quad g_\alpha(\vec{x},t) = 0$

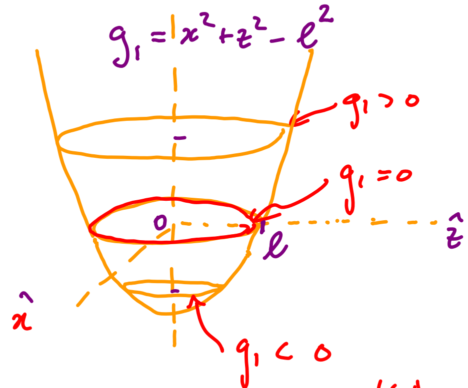
Richtung: $\quad \vec\nabla g_\alpha(\vec{x},t)$: $\perp$ HF

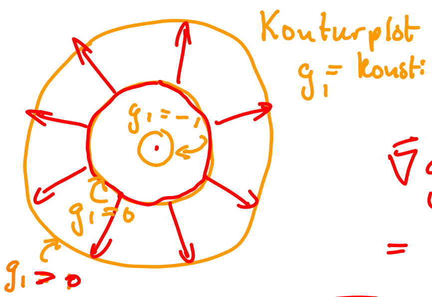
Betrag v. $\vec{Z}$: wird durch $\lambda_\alpha(t)$ so eingestellt, dass Bwg. (trotz äußerer Kräfte) in HF bleibt

Beipspiel: ebenes Pendel

Hyperfläche F1: $\quad g_1(x,y,z,t) = x^2 + z^2 - \ell^2 = 0 \quad$ (7.1)





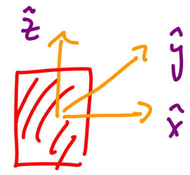


$$\vec\nabla g_\alpha = (\hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y + \hat{z}\partial_z)\, g_\alpha \qquad (7.2)$$
$$= 2(\hat{x}\, x + 0 + \hat{z}\, z)$$
$$= 2\vec{r}$$

(Radiusvektor in x-z-Ebene)

Zwangskraft 1: $\quad \vec{Z}_1 \overset{(6.1)}{=} \lambda_1(t)\, 2\vec{r} \quad$ (7.3)

Hyperfläche F2: $\quad g_2(x,y,z,t) = y = 0 \quad$ (7.4)



$$\vec\nabla g_2 = \hat{y}, \qquad \vec{Z}_2 = \lambda_2(t)\, \hat{y} \qquad (7.5)$$

Ende v. Beispiel

Bewegungsgleichung mit Zwangsbedingungen: L8

(6.3) eingesetzt in N2:

$$m\ddot{\vec{r}} \overset{(1.2)}{=} \vec{K}^{ext} + \vec{Z} \quad (8.1)$$

$$\overset{(6.3)}{=} \vec{K}^{ext} + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t)\, \vec{\nabla} g_\alpha(\vec{x},t) \quad (8.2)$$

gegeben ↗ ... ↑ Summe über alle ZK.

ZB: $g_\alpha(\vec{x},t) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, R$ (8.3)

(8.2), (8.3) sind $3+R$ Gleichungen mit $3+R$ Unbekannten

$3 \quad R$

$\vec{x}(t) \quad \lambda_\alpha(t)$

Durch Lösung dieser Gleichungen können alle Unbekannten bestimmt werden.

<u>Verallgemeinerung auf beliebiges N:</u> (3N Freiheitsgrade, n = 1, ..., 3N) L9

R Zwangsbedingungen: $\boxed{g_\alpha(x,t) = 0, \quad x = (x_1, \ldots, x_{3N})}$ (9.1)

$\alpha = 1, \ldots, R$

Ansatz für Zwangkraft (in $\hat{e}_n$ -Richtung): [Verallg. v. (6.3)]

$$Z_\alpha^n = \lambda_\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha(x,t) \qquad n = 1, \ldots, 3N \quad (9.2)$$

(9.2) eingesetzt in N2:

$$\boxed{m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_\alpha \overbrace{\lambda_\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha(x,t)}^{Z_\alpha^n\ (9.2)}, \quad n = 1, \ldots, 3N} \quad (9.3)$$

(9.1) und (9.3) bilden die "Lagrange-Gl. 1. Art": $3N+R$ Gleichungen für $3N+R$ Unbekannte

$x_n(t) \quad \lambda_\alpha(t)$