Beispiel für N = 2 mit einer ZB ($\alpha = 1$):

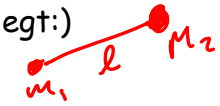
ZK auf Teilchen 1, 2

Notation für Zwangskräfte: (allgemein Z_α^n)

$$(Z_1^1, Z_1^2, Z_1^3) \equiv \vec{Z}^{(1)}, \quad (Z_1^4, Z_1^5, Z_1^6) \equiv \vec{Z}^{(2)} \tag{10.1}$$

Sei $$g_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = g_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t) \tag{10.2}$$

(z.B. sei Abstand festgelegt:)



z.B. $$= |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - l = 0 \tag{10.3}$$

ZK auf Teilchen 1: $\vec{r}_1 = (x_1, x_2, x_3)$

$$\vec{Z}^{(1)} = \lambda_1(t) \underbrace{(\partial_1, \partial_2, \partial_3)}_{\vec{\nabla}_1} g_1 = \lambda_1 \vec{\nabla}_1 g_1 \tag{10.4}$$

ZK auf Teilchen 2: $\vec{r}_2 = (x_4, x_5, x_6)$

$$\vec{Z}^{(2)} = \lambda_1(t) \underbrace{(\partial_4, \partial_5, \partial_6)}_{\vec{\nabla}_2} g_1 = \lambda_1 \vec{\nabla}_2 g_1 \tag{10.5}$$

$$\overset{(10.2)}{=} -\lambda_1 \vec{\nabla}_1 g_1 \overset{(10.4)}{=} -\vec{Z}^{(1)} \tag{10.6}$$

$\vec{\nabla}_1 g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{\nabla}_2 g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

N3 wird reproduziert!

Erhaltungssätze

Falls ZB Symmetrien verletzen, gelten entsprechende Erhaltungsätze nicht mehr.

Impulserhaltung:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \overset{(N2)}{=} \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = \vec{K} + \vec{Z} \overset{\text{falls}}{=} 0, \text{ dann } \vec{p} = \text{konst.} \tag{11.1}$$

Drehimpulserhaltung:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times (\vec{K} + \vec{Z}) \overset{\text{falls}}{=} 0, \text{ dann } \vec{L} = \text{konst} \tag{11.2}$$

Energieerhaltung (für konservative Kräfte Kn):

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{d}{dt} \sum_n \left[\frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 + U_n(x_n(t))\right] \tag{11.3}$$

$$= \sum_n \left[\dot{x}_n m \ddot{x}_n + \partial_n U_n \cdot \dot{x}_n\right] \tag{11.4}$$

Aber: $0 = g_\alpha(x,t)$

$$0 = \frac{d}{dt} g_\alpha(x,t) \tag{11.5}$$

$$= \sum_n \dot{x}_n \left[K_n + \sum_\alpha Z_\alpha^n - K_n\right] = \sum_n \sum_\alpha \lambda_\alpha (\partial_n g_\alpha) \dot{x}_n$$

$$= \sum_n (\partial_n g_\alpha) \dot{x}_n + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \tag{11.6}$$

$$= -\frac{\partial g_\alpha}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = -\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial t} g_\alpha \tag{11.7}$$

Fazit: Energie-Erhaltung, falls ZB nicht explizit zeitabhängig sind : $\partial_t g_\alpha = 0$ (11.8)

Lösungsrezept mit Lagrange-Gl. 1. Art (LG1):

1. Formulierung der ZB: $g_\alpha(x,t) = 0$ (11.1)
2. Aufstellung der LG1: $m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha$ (11.2)
3. Eliminierung der λ_α
4. Lösung der Bewegungsgl. für x_n → $x_n(t)$
5. Bestimung der Integrationskonstanten (so, dass ZB und Anfangsbedingungen erfüllt sind)
6. Bestimmung der Zwangskräfte, via $Z_\alpha^n = \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha(x,t)$
7. Diskussion !! (11.3)

Schritt 3 im Allgemeinen: Eliminierung der λ_α:

Eliminiere zunächst $\ddot{x}_n$:

(11.2) $m_n \ddot{x}_n = K_n(x,\dot{x},t) + \underbrace{\sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha}_{Z_n}$ (12.1)

$\frac{d}{dt}$(11.1) $0 = \frac{d}{dt} g_\alpha(x,t) = \sum_n (\partial_n g_\alpha)\dot{x}_n$ (12.2)

$\frac{d^2}{dt^2}$(11.1) = $\frac{d}{dt}$(12.2) $0 = \sum_n (\partial_n g_\alpha)\ddot{x}_n + \sum_n (\partial_t(\partial_n g_\alpha))\dot{x}_n$ (12.3)

$\equiv -F_\alpha(x,\dot{x},t)$

Eliminiere $\ddot{x}_n$ aus (12.1) und (12.3):

$(\alpha = 1,\dots,R)$ $F_\alpha = \sum_n (\partial_n g_\alpha)\frac{1}{m_n}\left[K_n + \sum_\beta \lambda_\beta (\partial_n g_\beta)\right]$ (12.4)

Dies ist ein lineares, inhomogenes Gleichungsystem für die R Größen λ_α (12.5)

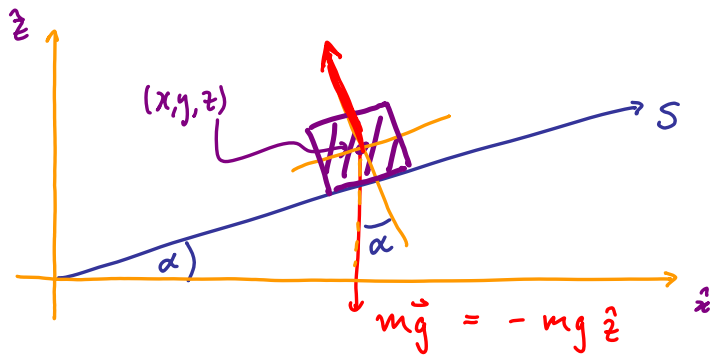
Kann im Prinzip gelöst werden; allgemeine Form der Lösung: $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(x,\dot{x},t)$

(12.5) in (12.1): $m_n \ddot{x}_n = K_n(x,\dot{x},t) + Z_n(x,\dot{x},t)$ (12.6)

$= \sum_\alpha \lambda_\alpha(x,\dot{x},t)\,\partial_n g(x,t)$

Rechte Seite ist bekannte Funktion v. $x, \dot{x}, t$; lösen durch Integration...

Beispiel: Reibungsfreies gleiten auf schiefer Ebene



$z\cos\alpha = x\sin\alpha$

$\frac{z}{x} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (13.1)

Schritt 1:
(Formulierung der ZB)

$$g_1(\vec{r},t) = x\sin\alpha - z\cos\alpha = 0 \quad (13.1a)$$

$$g_2(\vec{r},t) = y = 0 \quad (13.1b)$$

Schritt 2:
(Aufstellung der LG1)

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\hat{e}_z + \lambda_1\vec{\nabla}g_1 + \lambda_2\vec{\nabla}g_2 \quad (13.2)$$

$m_u\ddot{x}_u = K_u + \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_u g_\alpha$ (13.3)

$$= -mg\hat{e}_z + \lambda_1(\hat{e}_x\sin\alpha - \hat{e}_z\cos\alpha) + \lambda_2\hat{e}_y$$

(13.5) in Komponenten:

$$m\ddot{x} = \lambda_1\sin\alpha \quad (14.1a)$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2 \quad (14.1b)$$

$$m\ddot{z} = -mg - \lambda_1\cos\alpha \quad (14.1c)$$

Schritt 3:
(Elimination v. λ_α)

(12.3): $0 = \frac{d^2}{dt^2}g_1 = \ddot{x}\sin\alpha - \ddot{z}\cos\alpha$ (14.2)

(14.1) eingesetzt:
[entspricht (12.4)]

$$= \frac{\lambda_1}{m}\sin^2\alpha - \left(-g - \frac{\lambda_1}{m}\cos\alpha\right)\cos\alpha \quad (14.3)$$

Auflösen nach λ_1:
[entspricht (12.5)]

$\lambda_1(\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{=1}) = -mg\cos\alpha = \lambda_1$ (14.4)

Analog für $g_2 = 0$:

$0 = \frac{d^2}{dt^2}g_2 \overset{(13.1b)}{=} \ddot{y} \Rightarrow \lambda_2 \overset{(14.1b)}{=} 0$ (14.5)

Nun sind also λ_1 und λ_2 bekannt.

(14.5) in (14.1):

(14.1a) $m\ddot{x} = \overbrace{-mg\cos\alpha}^{\lambda_1 \text{ (14.4)}} \sin\alpha$ (15.1)

$m\ddot{y} = 0$ (15.2)

(14.1c) $m\ddot{z} = -mg - \overbrace{(-mg\cos\alpha)}^{\lambda_1 \text{ (14.4)}} \cos\alpha$ (15.3)

$= -mg(1-\cos^2\alpha) = -mg\sin^2\alpha$

$m\ddot{z} = -mg\sin^2\alpha$

(Nun sind λ_1 und λ_2 eliminiert)

Schritt 4:
(Lösen der Bewegungs-Gl. für x_n)
[Für dieses Beispiel ziemlich trivial...]

$\overset{(15.1)}{x(t)} = -\frac{1}{2}t^2 g\cos\alpha\sin\alpha + a_1 t + a_2$ (15.4)

$y(t) = b_1 t + b_2$ (15.5)

$z(t) = -\frac{1}{2}t^2 g\sin^2\alpha + c_1 t + c_2$ (15.6)

Schritt 5: Bestimmung der Integrationskonst., so, dass ZB und Anfangsbedingungen erfüllt sind.

ZB (13.1) für alle t: $x\sin\alpha = z\cos\alpha$, $y = 0$ (16.1)

t^2-Terme heben sich weg:

$\overset{(15.4)}{(a_1 t + a_2)}\sin\alpha = \overset{(15.6)}{(c_1 t + c_2)}\cos\alpha$ (16.2)

Ansatz zur Lösung v. (16.2):

$a_1 = v_0\cos\alpha$, $c_1 = v_0\sin\alpha$ (16.3)

$a_2 = s_0\cos\alpha$, $c_2 = s_0\sin\alpha$ (16.4)

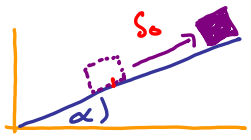
(v_0: Anfangsgeschw., s_0: Anfangsposition)

Eingesetzt in (15.6)

$x(t) = s(t)\cos\alpha$
$y(t) = 0$
$z(t) = s(t)\sin\alpha$

mit $s(t) = -\frac{1}{2}t^2 \overbrace{g\sin\alpha}^{g_{eff}} + v_0 t + s_0$ (16.5)

$s(t) = \{$ zurückgelegter Abstand entlang S-Achse

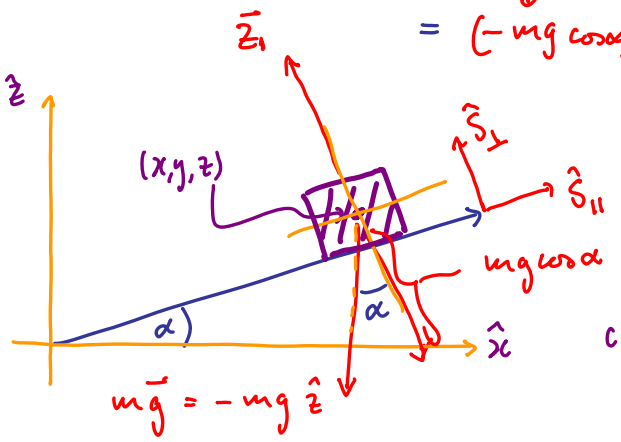


Schritt 6: (Bestimmung der Zwangskräfte)

(11.3) $Z_\alpha^\eta = \lambda_\alpha \partial_\eta g_\alpha$ (17.1)

$\vec{Z}_1 = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1$ $|Z_1| = mg\cos\alpha$ (17.2)

(14.4) $= (-mg\cos\alpha)(\hat{e}_x \sin\alpha - \hat{e}_z \cos\alpha)$ (17.3)



(17.4) $\vec{Z}_1 = -(m\vec{g}\cdot\hat{s}_\perp)\,\hat{s}_\perp$

check: $= -m(-g\hat{e}_z)\cdot(-\hat{e}_x\sin\alpha + \hat{e}_z\cos\alpha)\,\hat{s}_\perp$ ✓

$= mg\cos\alpha(-\hat{e}_x\sin\alpha + \hat{e}_z\cos\alpha)$

$= (17.4)$

Schritt 7: Diskussion $\vec{Z}_1$ kompensiert Schwerkraftanteil $\perp$ zur schiefen Ebene [siehe (17.4)]

Bemerkung:

Bewegung entlang der $\hat{s}$-Achse löst die effektive Bewegungs-Gleichung:

(16.5) $s(t) = -\frac{1}{2}t^2 g\sin\alpha + v_0 t + s_0$ (18.1)

$m\ddot{s}\,\hat{s}_\parallel = \underbrace{-mg\sin\alpha\,\hat{s}_\parallel}_{(m\vec{g}\cdot\hat{s}_\parallel)\hat{s}_\parallel}$ (18.2)

$\hat{s}_\parallel = (\hat{e}_x\cos\alpha + \hat{e}_z\sin\alpha)$

Kraft $\parallel$ zur Ebene

s(t) ist eine "verallgemeinerte Koordinate";

mit dem Ansatz

$$x(t) = s(t)\cos\alpha$$
$$y(t) = 0$$
$$z(t) = s(t)\sin\alpha$$

wäre (18.2) sofort aus N2, $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$ gefolgt, ohne dass es nötig gewesen wäre, Zwangskräfte zu berechnen.

Moral v.d. Geschichte: suche zunächst verallg. Koordinaten!!