

3N Freiheitsgrade:
($n = 1, \dots, 3N$)

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N})$$

R Zwangsbedingungen:

$$g_\alpha(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\text{definiert } \mathbb{R} \text{ Hyperflächen}) \quad (1)$$

$\alpha = 1, \dots, R$

Ansatz für Zwangskraft
(in $\hat{\mathbf{e}}_n$ -Richtung):
($n = 1, \dots, 3N$,
 $\alpha = 1, \dots, R$)

$$\mathbf{z}_\alpha^n = \lambda_\alpha(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_n} g_\alpha(\mathbf{x}, t) \perp (H F)_\alpha \quad (2)$$

(9.2) eingesetzt in N2:

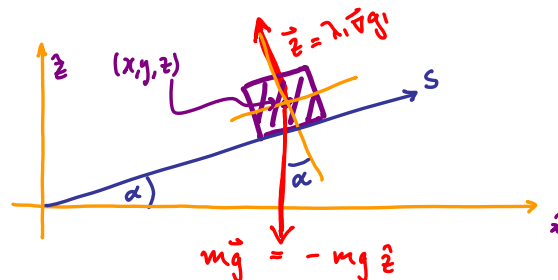
$$m_n \ddot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{K}_n + \underbrace{\lambda_\alpha(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_n} g_\alpha(\mathbf{x}, t)}_{\mathbf{z}_\alpha = \mathbf{z}_\alpha(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)}, \quad n = 1, \dots, 3N \quad (3)$$

1. Formulierung der ZB
2. Aufstellung der LG1
3. Eliminierung der λ_α
4. Lösung der Bewegungsgl. für $\mathbf{x}_n(t)$
5. Bestimmung der Integrationskonstanten
6. Bestimmung der Zwangskräfte, via $\mathbf{v}_n^0, \mathbf{x}_n^0$
7. Diskussion !!

$\mathbf{z}_\alpha = \mathbf{z}_\alpha(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$
[nach Eliminierung
der Parameter λ_α]

Beispiel 1: Reibungsfreies Gleiten auf schiefer Ebene (Zusammenfassung)

Ignoriere $\hat{y}$ -Richtung,
da trivial; betrachte
nur x - z -Ebene



$$\frac{z}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Schritt 1:
(Formulierung der ZB)

$$g_1(\vec{r}, t) = x \sin \alpha - z \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

Schritt 2:
(Aufstellung der LG1)

$$m_n \ddot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{K}_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_n} g_\alpha$$

$$m \ddot{x} = \lambda_1 \sin \alpha \quad \left(\lambda_1 \cdot \vec{\nabla} g_1 \right) \quad (2a)$$

$$m \ddot{z} = -mg - \lambda_1 \cos \alpha \quad (2b)$$

Schritt 3:
(Elimination v. λ_α)

$$0 \stackrel{(2a,b)}{=} \frac{d^2}{dt^2} g_1 = \ddot{x} \sin \alpha - \ddot{z} \cos \alpha \quad (3)$$

(2) eingesetzt in (3):

$$\lambda_1 = -mg \cos \alpha \quad (4)$$

(20.4) in (20.2):

(Nun ist λ_1 eliminiert)

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= -m \tilde{g} \cos \alpha \\ m \ddot{z} &= -m \tilde{g} \sin \alpha \end{aligned} \quad \boxed{\tilde{g} = g \sin \alpha} \quad (1)$$

← effektives g

Schritt 4 und 5:

(Lösen der
Bewegungs-Gl. für x_u ,

$$\begin{aligned} x(t) &= s(t) \cos \alpha \\ z(t) &= s(t) \sin \alpha \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x(t) &= s(t) \cos \alpha \\ z(t) &= s(t) \sin \alpha \end{aligned}} \right\} \text{mit } s(t) = -\frac{1}{2} t^2 \tilde{g} + v_0 t + s_0 \quad (2)$$

Berücksichtigung der
Anfangsbedingung)

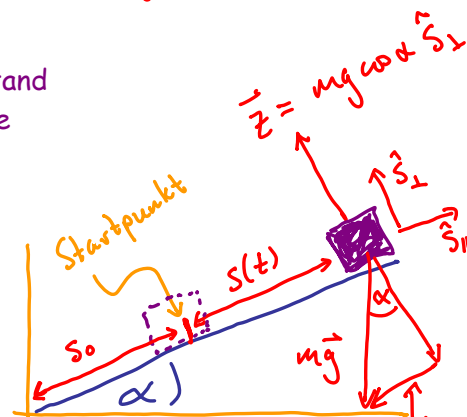
$s(t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{zurückgelegter Abstand} \\ \text{entlang } \hat{s} \text{-Achse} \end{array} \right.$

Schritt 6:

(Bestimmung der
Zwangskraft)

$$(z_1^u = \lambda, \partial_u q_1)$$

$$\vec{z}_1 = - \underbrace{(m \vec{g} \cdot \hat{s}_\perp)}_{mg \cos \alpha} \hat{s}_\perp \quad (3)$$



effektive Kraft: $\vec{F}_{\text{eff}} = mg \sin \alpha \hat{s}_{||}$

Schritt 7:

(Diskussion)

$s(t)$ ist "verallgemeinerte Koordinate",

d.h. ein Freiheitsgrad, der Zwangsbedingungen bereits berücksichtigt.

Die entsprechende Bewegungsgleichung ist einfach: $m \ddot{s} = -m g_{\text{eff}}$ (3)

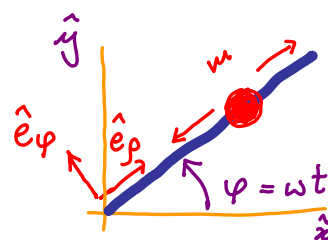
Beispiel 2: Reibungsloser Massenpunkt rotierender Stange

(zum Selbststudium; siehe Fließbach, Kapitel 8)

Schritt 1:

(Formulierung der ZB)

$$g(\varphi, t) = \varphi - \omega t = 0 \quad (1)$$



Schritt 2:

(Aufstellung der LG1)

$$m \ddot{\vec{r}} = \lambda \vec{\nabla} g \quad (2)$$

in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\lambda \vec{\nabla} g = \lambda \left[\hat{e}_\rho \partial_\rho + \hat{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \partial_\varphi \right] g \quad (3)$$

(1) $= 0 + \hat{e}_\varphi \lambda / \rho$

[Gradient in Polarkoordinaten]

$$\hat{e}_\rho(t) = \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y$$

$$\hat{e}_\varphi(t) = -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y$$

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$$

$$m \ddot{\vec{r}} = m \left[(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi}) \hat{e}_\varphi \right] \quad (4)$$

(3), (4) in (2):

$$\text{Koeff. v. } \hat{e}_\rho : m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) = 0 \quad (5a)$$

$$\text{Koeff. v. } \hat{e}_\varphi : m(\rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi}) = \lambda / \rho \quad (5b)$$

Schritt 3:
(Elimination v. λ)

$$\frac{d^2}{dt^2} (z\delta) = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$$

L23
(1)

(20.1) in (19.5b):

$$\lambda = z m \rho \dot{\rho} \dot{\varphi} = \lambda(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi}, t) \quad (2)$$

Funktionale Abhängigkeit nun bekannt!

Bewegungsgl. aufstellen:
(2) in (22.5):

$$(22.5a) \rightarrow \cancel{m}(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) = 0 \quad (3a)$$

$$(22.5b) \rightarrow m \rho \ddot{\varphi} = 0 \quad (3b)$$

Schritt 4 + 5:
(Lösen der Bewegungs-Gl.,
Best. d. Integrations-
konstanten):

$$(3a) : \rho(t) = 0 \quad (\text{ist triviale, instabile Lösung}) \quad (4)$$

Für $\rho(t) \neq 0$:

$$(1) \text{ integriert: } \varphi(t) = At + B \stackrel{(1)}{=} \omega t \quad (5a)$$

$$A = \omega, \quad B = 0 \quad (5b)$$

(23.5) eingesetzt in
Bwgs-Gl (23.3a):

$$\ddot{\rho} - \rho \omega^2 = 0$$

(1) L24

Lösungsansatz:

$$\rho(t) \propto e^{\kappa t} \Rightarrow (\kappa^2 - \omega^2) e^{\kappa t} = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \kappa = \pm \omega \quad (3)$$

Allgemeine Lösung:

$$\rho(t) \stackrel{(2)}{=} \tilde{A} e^{\omega t} + \tilde{B} e^{-\omega t} \quad (4)$$

$\tilde{A}, \tilde{B}$ sind bestimmt durch
Anfangsbedingungen:

$$\rho(0) = \tilde{A} + \tilde{B}, \quad \dot{\rho}(0) = \omega(\tilde{A} - \tilde{B}) \quad (5)$$

Lösen nach $\tilde{A}, \tilde{B}$

$$\left\{ \begin{matrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[\rho(0) \pm \dot{\rho}(0)/\omega \right] \quad (6)$$

Schritt 6:
(Bestimmung der
Zwangskräfte)

$$\vec{z} = \lambda \vec{\nabla} g \stackrel{(22.3)}{=} \hat{e}_\varphi \lambda / \rho \stackrel{(23.2)}{=} \hat{e}_\varphi z m \dot{\rho} \dot{\varphi} \quad (7)$$

$$\vec{z} = \hat{e}_\varphi z m \omega \left[\tilde{A} e^{\omega t} - \tilde{B} e^{-\omega t} \right] \omega \quad (8)$$

[ZK immer $\perp$ zur Bewegung]

[nicht-triviale t-Abhängigkeit: $Z = Z(t)$!]

Vorausblick:

L25

Oft sind wir nicht an der genauen Form der Zwangskraft interessiert.
In solchen Fällen ist es geschickter, neue "verallgemeinerte Koordinaten" zu wählen, die die Zwangsbedingungen automatisch erfüllen, und eine Transformation von Cartesischen zu verallgemeinerten Koordinaten durchzuführen.

$$(x_1, \dots, x_{3N}) \rightarrow (q, \dots, q_f) \quad f = \text{Anzahl Freiheitsgrade} \quad (1)$$

Aber: Newton 2 ist nicht "forminvariant" unter Transformation zu anderen Koordinatensystemen. (Das ist kein Problem an sich, aber lästig, unästhetisch).

$$m \ddot{x}_n = F_n \quad (n=1, \dots, 3N), \quad m_f \ddot{q}_f \neq F_f \quad (2)$$

Wünschenswert wäre eine alternative Formulierung der Newtonschen Bewegungsgleichungen, die "forminvariant" unter solchen Transformationen ist.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad i=1, \dots, 3N \quad (3)$$

Satz: N2 sind äquivalent zu "Lagrange-Gl. 2. Art" (L2):

Lagrange-Funktion: $L = \overbrace{T}^{\text{kinetische Energie}} - \underbrace{U}_{\text{potenzielle Energie}}$
 $= (x_1, \dots, x_{3N}; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3N})$

Satz: L2 sind forminvariant:

für verallgemeinerte Koordinaten gilt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i=1, \dots, f \quad (4)$$

Im folgenden:

- Newton 2 umschreiben in Lagrange 2, in Cartesischen Koordinaten, ohne ZB
- Beispiele für Verallgemeinerte Koordinaten und gebrauch von L2 (verallgemeinert)

Lagrange-Gleichungen 2.ter Art (in Cartesischen Koord., ohne ZB)

L26

3N Freiheitsgrade:

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_{3N}(t)) \quad (1)$$

N2 ohne ZB, mit konservativem Kraftfeld:

$$m_n \ddot{x}_n = F_n = - \frac{\partial}{\partial x_n} U(x_1, \dots, x_{3N}) \quad n=1, \dots, 3N \quad (2)$$

Linke Seite läßt sich auch schreiben als:

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \sum \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2 = m_n \dot{x}_n$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_n} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{3N} \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2}_{T = T(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3N})} \right) \right] \stackrel{\text{check}}{=} \frac{d}{dt} [m_n \dot{x}_n] \stackrel{\text{keine Summenkonv.}}{=} m_n \ddot{x}_n \quad (3)$$

(3) in (2):

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_n} T \right] = - \frac{\partial}{\partial x_n} U \quad \text{Funktion v. } 2 \times 3N \text{ Variablen} \quad (4)$$

Def: Lagrange-Funktion:

$$L(x_1, \dots, x_{3N}; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3N}) \equiv T - U \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_n} U = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_n} T = 0$$

Lagrange-Gl. 2. Art:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_n} L \right] \stackrel{(4)}{=} \frac{\partial}{\partial x_n} L \quad \text{"(L2)"} \quad (6)$$

Vorteil: gilt auch für verallgemeinerte Koordinaten und in Gegenwart von Zwangskräften!!

Oft lässt sich ein Problem durch geschickte Wahl neuer Koordinaten vereinfachen. Beispiele:

- Polarkoordinaten für rotationssymmetrisches Problem in 2D;
- Zylinderkoordinaten für zylindersymmetrisches Problem in 3D;
- Kugelkoordinaten für rotationssymmetrisches Problem in 3D;
- falls Zwangsbedingung (ZB) vorhanden, durch Koordinaten, welche ZB automatisch erfüllen.

Wir betrachten folglich Transformation von Cartesischen zu "verallgemeinerten Koordinaten".

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{3N}) \rightarrow \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_f)$$

$$\text{ZB: } \frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Beispiel 2: Schiefe Ebene

Entlang Ebene gilt:

$$x_1 = x, \quad x_2 = z$$

$$\begin{aligned} x &= s \cos \alpha \\ z &= s \sin \alpha \end{aligned} \quad (\alpha = \text{fest}) \quad (1)$$

Verallgemeinerte Koord:

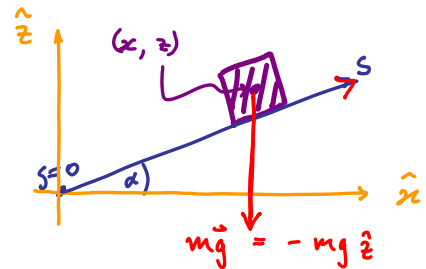
$$q_1 = s = s(t)$$

Geschwindigkeiten:

$$\dot{x}_n = \frac{dx_n}{dt}, \quad \dot{s} = \frac{ds}{dt}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{s} \cos \alpha \\ \dot{z} &= \dot{s} \sin \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = \dot{s}^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \dot{s}^2 \quad (3)$$



Kinetische Energie:

$$T(x, y) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \stackrel{(2,3)}{=} \frac{1}{2} m \dot{s}^2 = T(\dot{s}) \quad (2)$$

Potenzielle Energie:

$$U(x, z) = m g z \stackrel{(2,1)}{=} m g \sin \alpha s = m \tilde{g} s \quad (4)$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - U \stackrel{(3,4)}{=} \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - m \tilde{g} s = L(s, \dot{s}) \quad (5)$$

Behauptung:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \stackrel{(25.4)}{=} \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

L2 gilt auch für verallg. Koordinaten (Satz 25.4)
(haben wir noch nicht gezeigt, wollen es zunächst illustrieren)

$$(L2) \text{ für } q_1 = s: \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right] = \frac{\partial L}{\partial s} \quad (6)$$

Gewünschte Bewegungsgl.
für verallgemeinerte Koord:

$$\frac{d}{dt} \left[\cancel{m \dot{s}} \right] = - \cancel{m \tilde{g}} \quad \boxed{\ddot{s} = - \tilde{g}} \quad (7)$$

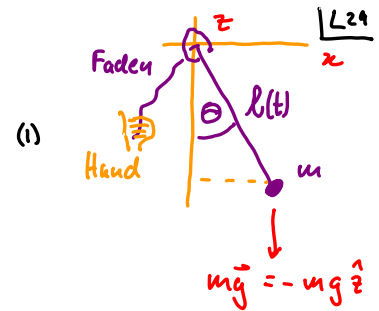
Lösung:

$$s(t) = -\frac{1}{2} \tilde{g} t^2 + v_0 t + s_0 \quad (21.3) \quad (8)$$

Beispiel 2: Ebenes Pendel

$$x_1 = x, \quad x_2 = z$$

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta \\ z &= -l \cos \theta \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Länge } l(t) \text{ sei} \\ \text{vorgegeben} \end{array} \right] \quad (1)$$



Verallgemeinerte Koord:

$$q_1 = \theta$$

Geschwindigkeiten:

$$\dot{x}_n = \frac{dx_n}{dt}$$

$$\dot{l} = \frac{dl}{dt}, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{x} \stackrel{(1)}{=} \dot{l} \sin \theta + l \cos \theta \dot{\theta}$$

(2a)

$$\dot{z} = -\dot{l} \cos \theta + l \sin \theta \dot{\theta}$$

(2b)

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{z}^2 &= (\dot{l}^2 \sin^2 \theta + 2\dot{l} \sin \theta l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2) \\ &\quad + (\dot{l}^2 \cos^2 \theta - 2\dot{l} \cos \theta l \sin \theta \dot{\theta} + l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2) \\ &\stackrel{\downarrow}{=} \dot{l}^2 + \underbrace{l^2 \dot{\theta}^2}_{v_\theta^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Kinetische Energie:

$$T(x, z) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} m (\dot{l}^2 + l^2 \dot{\theta}^2) = T(\dot{\theta}) \quad (4)$$

Potenzielle Energie:

$$U(x, z) = m g z \stackrel{(29.1)}{=} -m g l \cos \theta$$

L30
(1)

Lagrange-Funktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{l}^2 + l^2 \dot{\theta}^2) + m g l \cos \theta \stackrel{(1)}{=} L(\theta, \dot{\theta}) \quad (2)$$

Behauptung:

L2 gilt auch für verallg. Koordinaten (Satz 25.4)
(haben wir noch nicht gezeigt, wollen es zunächst illustrieren)

L2 für $q_1 = \theta$:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

(3)

[keine L2 für l , da $l(t)$
vorgegebene Funktion ist]

$$\frac{d}{dt} [\cancel{m} l^2 \dot{\theta}] \stackrel{(2)}{=} - \cancel{m} g l \sin \theta$$

(4)

Gewünschte Bewegungsgl.
für verallgemeinerte Koord:

$$2 l \dot{l} \dot{\theta} + l^2 \ddot{\theta} = - g l \sin \theta \quad \left[\begin{array}{l} \text{gl. für } \theta(t); \\ l(t) \text{ ist vorgegeben} \end{array} \right] \quad (5)$$

Für Pendel mit fester

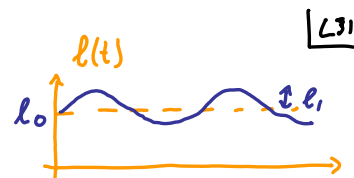
Länge: $l = l_0, \quad \dot{l} = 0$:

$$\ddot{\theta} = - \frac{g}{l_0} \sin \theta \approx - \frac{g}{l_0} \theta \quad \left[\begin{array}{l} \text{für kleine Auslenkungen.} \\ \text{= bekannte} \\ \text{Pendelgleichung} \end{array} \right] \quad (6)$$

Betrachte Pendel mit
zeitlich oszillierender
Länge:

$$\text{Sei } \ell(t) = \ell_0(1 + \varepsilon \sin \omega t) \quad (1)$$

$$\dot{\ell}(t) = \ell_0 \varepsilon \omega \cos \omega t \quad (2)$$



(2) in (3)

$$2 \underbrace{\ell_0(1 + \varepsilon \sin \omega t)}_{\ell} \underbrace{\ell_0 \varepsilon \omega \cos \omega t}_{\dot{\ell}} \dot{\theta} + \underbrace{\ell_0^2 \varepsilon^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}_{\ell^2} \ddot{\theta} + g \underbrace{\ell_0(1 + \varepsilon \sin \omega t)}_{\ell} \sin \theta = 0 \quad (3)$$

Für kleine Auslenkungen:

$$\sin \theta \approx \theta \quad (2)$$

*** Für $\theta \ll 1$ und $\varepsilon \ll 1$ lässt sich Lösung $\theta(t)$ mittels Störungstheorie finden:

Ansatz: $\theta(t) = \theta_0(t) + \varepsilon \theta_1(t)$ (Entwicklung in ε) (4)

(4) in (3):

Terme $\sim \varepsilon^0$: $\ddot{\theta}_0 + \frac{g}{\ell_0} \theta_0 = 0$ (5)

[harmonischer Oszillator mit
Frequenz $\omega_0 = \sqrt{g/\ell_0}$]

Terme $\sim \varepsilon^1$: $\varepsilon \left[\omega (\cos \omega t) \dot{\theta}_0 + (2 (\sin \omega t) \ddot{\theta}_0 + \ddot{\theta}_1) + \frac{g}{\ell_0} ((\sin \omega t) \theta_0 + \theta_1) \right] = 0$ (6)

Zum selber rechnen: Bestimme $\theta_1(t)$! Hinweis: Lösung von (5) für $\theta_0(t)$ in (6) einsetzen.
 $\theta_1(t)$ ist getriebener harmonischer Oszillator!

Beispiel 3: Reibungsloser Massenpunkt rotierender Stange

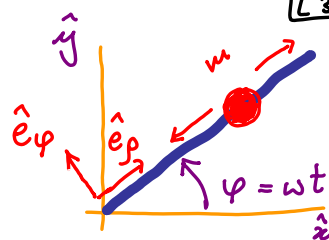
L 3.2

$$x_1 = x, \quad x_2 = y$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \end{aligned}$$

Vorgegeben:

$$\varphi = \omega t \quad (1)$$



Verallgemeinerte Koord:

$$q_1 = \rho = \rho(t) \quad (2)$$

Geschwindigkeiten:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$$

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \dot{\varphi}$$

[analog zu (29.2)] (3)

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2$$

[analog zu (29.3)] (4)

Lagrange-Funktion:

Cartesischen Koord:

$$L(x, y; \dot{x}, \dot{y}) = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 0 \quad (5)$$

in Polarkoord:

$$L(\rho, \dot{\rho}) \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) \quad (6)$$

Vergleiche mit (30.2) – dort hatten wir $L = L(\theta, \dot{\theta})$, hier $L = L(\rho, \dot{\rho})$.

Behauptung:

L₂ gilt auch für verallg. Koordinaten (Satz 25.4)
(haben wir noch nicht gezeigt, wollen es zunächst illustrieren)

L33

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (25.4)$$

$$L(\rho, \dot{\rho}) \stackrel{(32.6)}{=} \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) \quad (1)$$

L₂ für $q_1 = \rho$:

[keine L₂ für φ , da $\varphi(t)$
vorgegebene Funktion ist]

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right] = \frac{\partial L}{\partial \rho} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} [\cancel{\rho} \dot{\rho}] \stackrel{(2)}{=} \cancel{\rho} \dot{\rho}^2 \quad (4)$$

Gewünschte Bewegungsgl.
für verallgemeinerte Koord:

$$\ddot{\rho} = \rho \omega^2 \quad (32.1) \quad \downarrow \quad \dot{\varphi} = \omega$$

vergleiche (23.3) (5)

Lösung:

$$\rho(t) = \tilde{A} e^{\omega t} + \tilde{B} e^{-\omega t} \quad (6)$$

$\tilde{A}, \tilde{B}$ folgen aus Anfangsbedingungen, siehe S. 23, 24.

Beispiel 4: 2-dimensionaler harmonischer Oszillator (ohne ZB)

L34

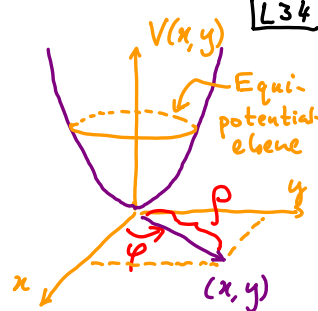
Potenzial:

$$U = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} k \rho^2 \quad (1)$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = y \\ q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi$$

$$x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi$$

(2a)
(2b)



Geschwindigkeiten:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$$

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \dot{\varphi} \quad (1) \quad (2)$$

$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \dot{\varphi} \quad (2)$$

[analog zu (29.2)] (3)

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \quad [\text{analog zu (29.3)}] \quad (4)$$

Lagrange-Funktion:

Cartesischen Koord:

$$L(x, y; \dot{x}, \dot{y}) = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} k (x^2 + y^2) \quad (5)$$

in Polarkoord:

$$L(\rho, \varphi; \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2} k \rho^2 \quad (6)$$

Behauptung: L_z gilt nicht nur für: $q_1 = x, q_2 = y$ [haben wir schon gezeigt: (26.6)] L35
sondern auch für: $q_1 = \rho, q_2 = \varphi$ [das wollen wir jetzt für 2D-
Oszillator checken!]

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \stackrel{(25.4)}{=} 0 \quad L(\rho, \varphi; \dot{\rho}, \dot{\varphi}) \stackrel{(34.6)}{=} \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2} k \rho^2 \quad (1)$$

$$(2) \text{ für } q_i = \rho: \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right] \stackrel{(25.4)}{=} \frac{\partial L}{\partial \rho} \quad (2)$$

Gewünschte Bewegungsgl. für $\ddot{\rho}$:

$$\frac{d}{dt} \left[\underbrace{m \dot{\rho}}_{m \dot{\rho}} \right] \stackrel{(1)}{=} \underbrace{m \rho \dot{\varphi}^2 - k \rho}_{\text{werden wir gleich checken}} \quad (3)$$

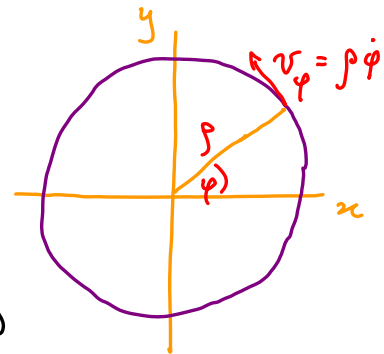
$$(2) \text{ für } q_i = \varphi: \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right] \stackrel{(25.4)}{=} \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad (4)$$

Gewünschte Bewegungsgl. für $\ddot{\varphi}$:

$$\frac{d}{dt} [m \rho^2 \dot{\varphi}] \stackrel{(1)}{=} 0 \quad (5)$$

Drehimpulserhaltung!!

$$m \rho \underbrace{\rho \dot{\varphi}}_{v_\varphi} = \tilde{L} = \text{Drehimpuls} = \text{konst.} \quad (6)$$



Check (33.3) mittels N_z :

N_z , Cartesisch:

$$U(x, y) \stackrel{(27.1)}{=} \frac{1}{2} k (x^2 + y^2)$$

$$m \ddot{x} = F_x = - \frac{\partial U}{\partial x} \stackrel{(34.1)}{=} -kx \stackrel{(34.2)}{=} -k \rho \cos \varphi \quad (1a)$$

$$m \ddot{y} = F_y = - \frac{\partial U}{\partial y} \stackrel{(34.1)}{=} -ky \stackrel{(34.2)}{=} -k \rho \sin \varphi \quad (1b)$$

Transformiere $\ddot{x}, \ddot{y}$

nach Polarkoord:

~~~~~

"selber Nachrechnen!"

$$\ddot{x} \stackrel{(34.3)}{=} \ddot{\rho} \cos \varphi - 2 \dot{\rho} (\sin \varphi) \dot{\varphi} - \rho (\cos \varphi) \dot{\varphi}^2 - \rho (\sin \varphi) \ddot{\varphi} \quad (2a)$$

$$\ddot{y} \stackrel{(34.3)}{=} \ddot{\rho} \sin \varphi + 2 \dot{\rho} (\cos \varphi) \dot{\varphi} - \rho (\sin \varphi) \dot{\varphi}^2 + \rho (\cos \varphi) \ddot{\varphi} \quad (2b)$$

$$(\text{mittels } \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1) \quad (1a) \quad (2c) \quad (3a)$$

Hieraus folgt:

$$m (\cos \varphi \ddot{x} + \sin \varphi \ddot{y}) = \begin{matrix} \xrightarrow{(2)} m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) & \text{(einerseits)} \\ \xrightarrow{(1)} -k\rho & \text{(andererseits)} \end{matrix} \quad (3b)$$

Es gilt also:

$$\underbrace{m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2)}_{\text{bestätigt (35.3)}} = -k\rho = -\frac{\partial U}{\partial \rho} = F_\rho \quad \text{und NICHT } m \ddot{\rho} \neq F_\rho \quad (4)$$

Fazit: Bewegungsgleichung  $N_z$  ist nicht Forminvariant unter Transformation zu Polarkoord. !!