

Herleitung der LG 2. Art

11.11.23.5.07

L37

Ausgangspunkt:
3N Koordinaten

$$x = (x_1, \dots, x_{3N})$$

$$n = 1, \dots, 3N$$

mit R Zwangsbedingungen:

$$g_\alpha(x) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, R$$

$$f = 3N - R$$

Antahl Freiheitsgrade

LG 1. Art

(Nz mit Zwangskräften):

$$m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha,$$

Ziel: Wähle verallgemeinerte Koordinaten, q_κ , $\kappa = 1, \dots, f$

so, dass die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt sind; forme die LG 1. Art mittels der Variablen-Transformation $x = x(q, t)$ so um, dass ~~die~~ nur von q und t abhängen.

Vorschau auf das
Endergebnis der
Umformung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, f$$

"LG 2. Art"
"Euler-Lagrange-Gl!"

Lagrange-Funktion:

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, \dot{q}, t)$$

Bemerkungen: LG2 = "Weltformel der Mechanik"!

L38

Lagrange-Gl. 2.ter Art sind $3N - R$ Differentialgleichungen 2. Ordnung für $3N - R$ Koordinaten, mit Anfangsbedingungen $q(0)$, $\dot{q}(0)$.

$L(q, \dot{q}, t)$ ist nicht eindeutig: verschiedene Wahl v. q möglich

$L(q, \dot{q}, t)$ ist nicht messbar, aber sehr nützliche theoretische Größe!

Vorzüge der Lagrange-Gl. 2. Art:

- (i) $f = 3N - R$ Gleichungen, statt $3N + R$ Gleichungen bei Lagrange-Gl. 1
- (ii) L ist ein Skalar, und somit viel leichter zu bestimmen als Bewegungsgleichungen
(= Vektor-Gleichungen)
- (iii) L hat oft eine sehr einfache Form
- (iv) Erhaltungsgrößen lassen sich leicht von L ablesen

Erhaltungsgrößen:

L39

Def: "verallgemeinerte Impuls":

(1)

Def: Falls $L = L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ für ein bestimmtes k nicht von q_k abhängt, sondern nur von $\dot{q}_k$, d.h. $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$, ist q_k eine "zyklische Koordinate"

Satz:

Für eine zyklische Koordinate ist der verallg. Impuls erhalten.

Beweis:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial L}{\partial q_k} \Rightarrow \Rightarrow \quad (2)$$

Beispiel 2D harm.

$$\stackrel{(351)}{L} = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2} k \rho^2 = L(\rho, \varphi; \dot{\rho}, \dot{\varphi}) \quad (4)$$

Oszillator:

$$\varphi \text{ ist zyklisch: } \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \rho^2 \dot{\varphi} = \text{Drehimpuls} = \text{erhalten} \quad (5)$$

Ausgangspunkt: LG 1. Art

L40

$$\left. \begin{aligned} \vec{x} &= (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{\tilde{N}}), \\ \dot{\vec{x}} &= (\dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_{\tilde{N}}), \\ \vec{p} &= (m_1 \dot{\vec{x}}_1, \dots, m_{\tilde{N}} \dot{\vec{x}}_{\tilde{N}}) \end{aligned} \right\} \quad n=1, \dots, \tilde{N} \quad \text{für } N \text{ Teilchen in 3D} \quad (1)$$

Zwangsbedingungen:

$$g_\alpha(\vec{x}, t) = g_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{\tilde{N}}, t) = 0 \quad \alpha=1, \dots, R \quad (2)$$

Zwangskräfte:

$$\vec{z}_\alpha = \lambda_\alpha \vec{\nabla} g_\alpha = (z'_\alpha, \dots, z''_\alpha) \quad \alpha=1, \dots, R \quad (3)$$

$$z''_\alpha = \quad n=1, \dots, \tilde{N}$$

Lgl:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{K} + \sum_{\alpha=1}^R \vec{z}_\alpha \quad (4)$$

$\tilde{N}$ Gleichungen für die Komponenten $\dot{p}_n$:

$$\dot{p}_n = m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_n} \quad (5)$$

Beispiel: Perle auf rotierender Stange

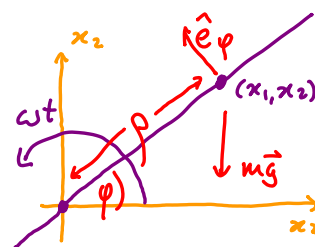
(L41)

Zwangsbedingung sei: $\varphi = \omega t$ (A)

Potenzial sei: $U = mgx_2$ (B)

$\vec{x} =$ $x_1 =$ (1')

$\vec{N} =$ $x_2 =$
 $\rho =$
 $\varphi =$ (c)



ZB: $R = 1$ $g_1 =$ (2')

Richtung d. Zwangskraft bestimmt durch: $\vec{\nabla} g_1 = \partial_n g_1 = (\partial_1 g_1, \partial_2 g_1) = \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right)$ (siehe Zwischenrechnung) (3')

$Lg_1:$ $m\ddot{x}_1 = 0 - \lambda x_2 / (x_1^2 + x_2^2)$ (5')

$m\ddot{x}_2 = -mg + \lambda x_1 / (x_1^2 + x_2^2)$

Zwischenrechnungen

[L41a]

Zu (40.5'):

$$\partial_1 g = \frac{\partial}{\partial x_1} \arctan \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{(x_2/x_1)^2 + 1} \cdot \left(-\frac{x_2}{x_1^2} \right) = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}$$

$$\partial_2 g = \frac{\partial}{\partial x_2} \arctan \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{(x_2/x_1)^2 + 1} \left(\frac{1}{x_1} \right) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\cos \varphi}{\rho}$$

$$\partial_n g = \frac{1}{\rho} (-\sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_2) = \frac{1}{\rho} \hat{e}_\rho$$

Schritt 1: Einführung von Verallgemeinerten Koordinaten

L42

Leitidee von LG2:

(für Situationen, wo man nicht an der genauen Form der Zwangskraft interessiert ist)

Wähle f "verallgemeinerte" oder "generalisierte" Koordinaten,

$$\tilde{\mathbf{q}} = (q_1, \dots, q_f) \in \mathbb{R}^f, \quad \text{mit} \quad (1)$$

so, dass alle Zwangsbedingungen "automatisch" erfüllt sind:

(2)

für beliebige

Kurznotation:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \quad, \quad \tilde{\mathbf{q}} = (q_1, \dots, q_f); \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$$

Beispiel:

ZB: $\varphi = \omega t$

$$q_1 = \rho$$

$$x_1 = \rho \cos \varphi = \rho \cos \omega t =$$

(1')

$$\stackrel{(4.1.1')}{x_2} = \rho \sin \varphi = \rho \sin \omega t =$$

$$q_1 = \arctan \frac{x_2}{x_1} - \omega t =$$

automatisch erfüllt

(2')

Schritt 2: Finde "erlaubte Hyperfläche"

(Schnittmenge aller durch ZB festgelegten Hyperflächen)

Kettenregel

L42

$$g_\alpha(x(q,t)) = 0 \quad \forall \alpha: \Rightarrow 0 = \frac{\partial g_\alpha(x(q,t), t)}{\partial q_k} =$$

(4.0.3)

$\forall \alpha = 1, \dots, R$
 $\forall k = 1, \dots, f$

(1)

$$\left[\sum_{n=1}^{\tilde{N}} A_n B_n = \vec{A} \cdot \vec{B} \right]$$

$$(\perp \text{HF}_\alpha) \cdot (\parallel \text{HF}_\alpha)$$

Def:

"Virtuelle Verrückung": $(\delta \tilde{\mathbf{x}})_k = \left(\underbrace{\quad}_{\tilde{N} \text{ Komponenten}} \right) =$

$k = 1, \dots, f$

(2)

= Vektor parallel zu allen HF_α also eine Koordinatenänderung, die keine der ZB verletzt!

Die virt. Verrückungen, $k=1, \dots, f$, bilden Basis für "erlaubte HF" am Punkt $\mathbf{x}$:

$$\text{Spann} \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial q_f} \right\} = \text{erlaubte Hyperfläche} \quad (3)$$

= "Tangentenraum"

= Unterraum von $\mathbb{R}^{\tilde{N}}$

Beispiel:

$$(\delta \tilde{\mathbf{x}})_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \rho}, \frac{\partial x_2}{\partial \rho} \right) =$$

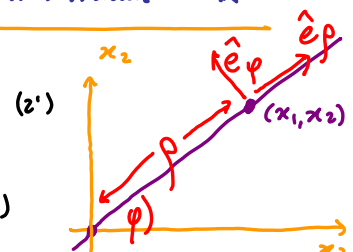
$$x_1 = \rho \cos \varphi$$

$$x_2 = \rho \sin \varphi$$

$$\text{HF} =$$

(ändert sich mit t !)

(3')



Beispiel in 3D: magnetische Scheibe auf rotierender Platte

L43

Zylinderkoordinaten:

$$x_1 = \rho \cos \varphi$$

$$x_2 = \rho \sin \varphi$$

$$x_3 = z$$

Verallg. Koordinaten:

$$q_1 = \rho$$

$$q_2 = z$$

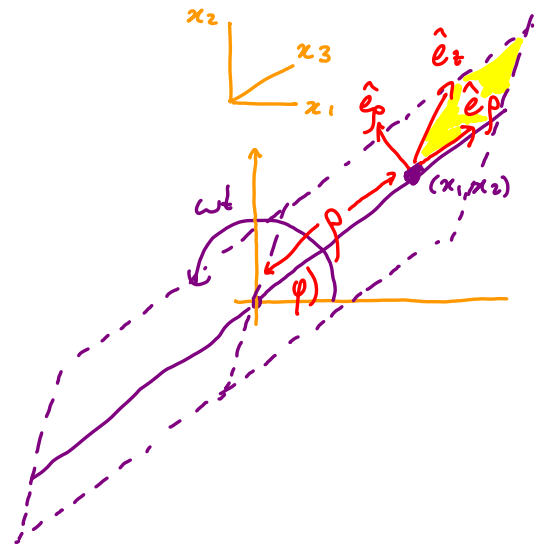
Virtuelle Verrückungen:

(4.2.2')

$$(\delta \vec{x})_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \rho}, \frac{\partial x_2}{\partial \rho}, \frac{\partial x_3}{\partial \rho} \right) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) = \hat{e}_\rho$$

$$(\delta \vec{x})_2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial z}, \frac{\partial x_2}{\partial z}, \frac{\partial x_3}{\partial z} \right) = (0, 0, 1) = \hat{e}_z$$

HF: aufgespannt durch $\hat{e}_\rho, \hat{e}_z$ = Platte!



Schritt 3: Projektion der Bwgl. auf erlaubte Hyperfläche

L44

(L51)

:

$$(\ddot{\vec{p}} - \vec{K})$$

(4.4)

$$= \sum_{\alpha=1}^R \vec{c}_\alpha$$

$$= 0$$

(1)

"d'Alembertsches Prinzip":

Zwangsbedingungen sind somit komplett eliminiert!!

(2)

Def: Verallg. Kraft:

$$Q_k \equiv$$

(3)

für konservative
 $K_n = -\partial_n U(x)$

$$Q_k =$$

$$=$$

(4)

$$\dot{\vec{p}} \cdot (\delta \vec{x})_k \stackrel{(1,3)}{=} \stackrel{(4)}{=} - \frac{\partial U(q,t)}{\partial q_k}$$

(5)

Beispiel:

$$(\ddot{\vec{x}} + mg \hat{e}_z) \cdot \hat{e}_\rho \stackrel{(1)}{=} 0: \quad m(\ddot{x} \cos \varphi + \dot{x} \sin \varphi) = -mg \sin \varphi =$$

(5')

$$\stackrel{(4.2.2')}{=} (\cos \varphi, \sin \varphi) = (4.2.2')$$

$$U(\vec{x}) = mgx_2 \stackrel{(4.0.5')}{=} mg\rho \sin \varphi = U(\rho)$$

[unterschiedliche funktionale Abhängigkeiten !!]

Schritt 4: $\vec{p}$ durch $q, \dot{q}, t$ ausdrücken:

| L45

Schritt 4a:

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt} \vec{x}(q(t), t) = \quad (1)$$

$$Ax + B = C, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = A:$$

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial \dot{q}_k} = \quad \left[\text{Komponentenweise: } \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \right] \quad (2)$$

Beispiel:

$$\vec{x}^{(4.1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \omega t \\ \rho \sin \omega t \end{pmatrix} \quad (A)$$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} \stackrel{(A)}{=} \begin{pmatrix} \dot{\rho} \cos \omega t \\ \dot{\rho} \sin \omega t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho \omega \sin \omega t \\ \rho \omega \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (1')$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{\rho}} \stackrel{(1')}{=} \stackrel{(A)}{=} \quad (2')$$

Schritt 4: $\vec{p}$ durch $q, \dot{q}, t$ ausdrücken:

| L46

Schritt 4b:

Kinetische Energie T sei durch $q, \dot{q}, t$ ausgedrückt:

$$T(q, \dot{q}, t) = T(\dot{\vec{x}}(q, \dot{q}, t)) = \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \frac{1}{2} m_n \dot{\vec{x}}_n^2(q, \dot{q}, t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial q_k} \stackrel{(1)}{=} = \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} \stackrel{(1)}{=} = \stackrel{(4.5.2)}{=} \quad (3)$$

Kettenregel

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right] = \frac{d}{dt} \left[\vec{p} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{q}_k} \right] = \quad (4)$$

$$(4) - (2); \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \quad (5)$$

Projektion von $\vec{p}$ auf die virtuelle Verrückung $(\delta \vec{x})_k$

Beispiel:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \cos \omega t \\ \dot{\rho} \sin \omega t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho \omega \sin \omega t \\ \rho \omega \cos \omega t \end{pmatrix}$$

L47
(45.1')

(Seite 34) 

$$m(\dot{p}^2 + \omega^2 p^2) = T(p, \dot{p}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \quad (1)$$

$$m \rho \omega^2 = \frac{\partial T}{\partial \rho} = m \left(\dot{x}_1 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \rho} + \dot{x}_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \rho} \right) = m \left(-\dot{x}_1 \omega \sin \omega t + \dot{x}_2 \omega \cos \omega t \right) \quad (2')$$

$$m \dot{\rho} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = m \left(\dot{x}_1 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{\rho}} + \dot{x}_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \dot{\rho}} \right) = m \left[\dot{x}_1 \cos \omega t + \dot{x}_2 \sin \omega t \right] \quad (3')$$

$$m\ddot{j} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{j}} \right] = m\ddot{x}_1 \cos \omega t - m\dot{x}_1 \omega \sin \omega t \quad (4')$$

$$+ m \ddot{x}_2 \sin \omega t + m \ddot{x}_2 \omega \cos \omega t \quad (5')$$

$$m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} \right] - \frac{\partial T}{\partial \rho} = m(\ddot{x}_1 \cos \omega t + \ddot{x}_2 \sin \omega t) = m\ddot{x} \cdot \hat{e}_\rho$$

Damit haben wir (36.4) reproduziert!

Schritt 5: Kombiniere Ergebnisse von Schritten 3 und 4:

1248

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \stackrel{\text{Schritt 4}}{\underset{(46.5)}{=}} \dot{\vec{p}} \cdot (\delta \vec{x})_k \stackrel{\text{Schritt 3}}{\underset{(44.5)}{=}} - \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (1)$$

Satz: Für geschwindigkeitsunabhängige Potentiale, mit $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$

(2)

gilt:

$$\frac{d}{dt} \quad (1) \quad = \quad (3)$$

Definiere "Lagrange-Funktion":

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, \dot{q}, t) \quad (4)$$

Lagrange-Gl. 2. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \stackrel{(3)}{=} \frac{\partial}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, f \quad (5)$$

