Herleitung der LG 2. Art

Ausgangspunkt: 3N Koordinaten $x = (x_1, \dots, x_{3N})$ $n = 1, \dots 3N$

mit R Zwangsbedingungen: $g_\alpha(x) = 0 \,, \quad \alpha = 1, \dots, R$ $\qquad f = 3N - R$

Anzahl Freiheitsgrade

LG 1. Art (Nz mit Zwangskräften): $$m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha \,,$$

<u>Ziel:</u> Wähle verallgemeinerte Koordinaten, $q_\kappa \,, \quad \kappa = 1, \dots, f$

so, dass die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt sind; forme die LG 1. Art mittels der Variablen-Transformation x = x(q,t) so um, dass sie nur von q, $\dot q$ und t abhängen.

Vorschau auf das Endergebnis der Umformung:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial \dot q_k} = \frac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial q_k} \,, \quad k = 1, \dots, f}$$

"LG 2. Art"
"Euler-Lagrange-Gl."

Lagrange-Funktion: $$\boxed{L(q,\dot q,t) = T(q,\dot q,t) - U(q,\dot q,t)}$$

Bemerkungen: LG2 = "Weltformel der Mechanik"!

Lagrange-Gl. 2.ter Art sind 3N - R Differentialgleichungen 2. Ordnung für 3N - R Koordinaten, mit Anfangsbedingungen $q(0)$, $\dot q(0)$.

L(q,q,t) ist nicht eindeutig: verschiedene Wahl v. q möglich

L(q,q,t) ist nicht messbar, aber <u>sehr</u> nützliche theoretische Größe!

Vorzüge der Lagrange-Gl. 2. Art:

(i) f = 3N - R Gleichungen, statt 3N + R Gleichungen bei Lagrange-Gl. 1

(ii) L ist ein Skalar, und somit viel leichter zu bestimmen als Bewegungsgleichungen (= Vektor-Gleichungen)

(iii) L hat oft eine sehr einfache Form

(iv) Erhaltungsgrößen lassen sich leicht von L ablesen

Erhaltungsgrößen:

Def: "verallgemeinerte Impuls": $p_\kappa = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\kappa}$ (1)

Def: Falls $L = L(q_1, \dots q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ für ein bestimmtes κ nicht von q_κ abhängt, sondern nur von $\dot{q}_\kappa$, d.h. $\frac{\partial L}{\partial q_\kappa} = 0$, ist q_κ eine "zyklische Koordinate"

Satz: Für eine zyklische Koordinate ist der verallg. Impuls erhalten.

Beweis: (3)

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\kappa}\right)}_{p_\kappa} \overset{L2}{=} \frac{\partial L}{\partial q_\kappa} \overset{(2)}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d p_\kappa}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\kappa = \text{konst.}$$

Beispiel 2D harm. Oszillator:

$$L \overset{(35.1)}{=} \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2} k \rho^2 = L(\rho, \cancel{\varphi}; \dot{\rho}, \dot{\varphi}) \,, \qquad (4)$$

φ ist zyklisch: $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \rho \dot{\varphi}^2$ = Drehimpuls = erhalten (5)

Ausgangspunkt: LG 1. Art

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{\tilde{N}}), \\ \dot{\vec{x}} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{\tilde{N}}), \\ \vec{p} = (m_1 \dot{x}_1, \dots, m_{\tilde{N}} \dot{x}_{\tilde{N}}) \end{array}\right\} \quad n = 1, \dots \tilde{N} = 3N \text{ für } N \text{ Teilchen in 3D} \qquad (1)$$

$$\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{p} \in \mathbb{R}^{\tilde{N}}$$

Zwangsbedingungen: $g_\alpha(\vec{x}, t) = g_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{\tilde{N}}, t) = 0 \qquad \alpha = 1, \dots, R$ (2)

Zwangskräfte: (3)

$$\vec{Z}_\alpha = \lambda_\alpha \vec{\nabla} g_\alpha = (Z_\alpha^1, \dots, Z_\alpha^{\tilde{N}}) \in \mathbb{R}^{\tilde{N}} \qquad \alpha = 1, \dots, R$$

$$Z_\alpha^n = \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \qquad n = 1, \dots, \tilde{N}$$

LG1:

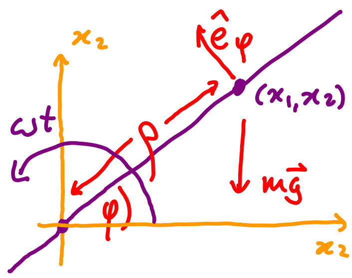
$$\dot{\vec{p}} = \vec{K} + \sum_{\alpha=1}^{R} \vec{Z}_\alpha \qquad (4)$$

$\tilde{N}$ Gleichungen für die Komponenten $\dot{p}_n$:

$$\dot{p}_n = m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \qquad (5)$$

Beispiel: Perle auf rotierender Stange

(L41)



Zwangsbedingung sei: $\varphi = \omega t$ (A)

Potenzial sei: $U = m g x_2 = m g \rho \sin\varphi$ (B)

$\vec{x} = (x_1, x_2)$

$\tilde{N} = 2$

$$x_1 = \rho \cos\varphi$$
$$x_2 = \rho \sin\varphi \qquad (1')$$

$$\rho = x_1^2 + x_2^2$$
$$\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1} \qquad (C)$$

ZB: $R = 1$ $\quad g_1 = \arctan \frac{y}{x} - \omega t = 0$ (2')

(siehe Zwischenrechnung)

Richtung d. Zwangskraft bestimmt durch:

$$\vec{\nabla} g_1 = \partial_n g_1 = (\partial_1 g_1, \partial_2 g_1) = \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{1}{\rho} \hat{e}_\varphi \qquad (3')$$

LGl:

$$m \ddot{x}_1 = 0 - \lambda x_2 / (x_1^2 + x_2^2)$$
$$m \ddot{x}_2 = -mg + \lambda x_1 / (x_1^2 + x_2^2) \qquad (5')$$

Zwischenrechnungen

L41a

Zu (40.5'):

$$\partial_1 g = \frac{\partial}{\partial x_1} \arctan \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{(x_2/x_1)^2 + 1} \cdot \left(-\frac{x_2}{x_1^2} \right) = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}$$

$$\partial_2 g = \frac{\partial}{\partial x_2} \arctan \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{(x_2/x_1)^2 + 1} \left(\frac{1}{x_1} \right) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

$$\partial_n g = \frac{1}{\rho} \left(-\sin\varphi \, \hat{e}_1 + \cos\varphi \, \hat{e}_2 \right) = \frac{1}{\rho} \hat{e}_\rho$$

Schritt 1: Einführung von Verallgemeinerten Koordinaten

Leitidee von LG2: (für Situationen, wo man nicht an der genauen Form der Zwangskraft interessiert ist)

Wähle f "verallgmeinerte" oder "generalisierte" Koordinaten,

$$\tilde{q} = (q_1, \dots, q_f) \in \mathbb{R}^f, \quad \text{mit} \quad \vec{x} = \vec{x}(q,t), \qquad (1)$$

so, dass alle Zwangsbedingungen "automatisch" erfüllt sind:

$$g_\alpha(x_1(q,t), \dots, x_{\tilde N}(q,t), t) = 0 \quad \text{für beliebige} \quad q, t \qquad (2)$$

Kurznotation: $\vec{x} = \vec{x}(q,t)$, $\tilde{q} = (q_1, \dots, q_f)$; $\dot{\tilde{q}} = (\dot q_1, \dots, \dot q_f)$

Beispiel:

$$q_1 = \rho$$

ZB: $\varphi = \omega t$

$$x_1 = \rho\cos\varphi = \rho\cos\omega t = x_1(\rho,t) \qquad (1')$$

$$x_2 \overset{(41.1')}{=} \rho\sin\varphi = \rho\sin\omega t = x_2(\rho,t)$$

automatisch erfüllt

$$g_1 = \arctan\frac{x_2}{x_1} - \omega t \overset{(1')}{=} \underbrace{\arctan\left(\frac{\sin\omega t}{\cos\omega t}\right)}_{\omega t} - \omega t = 0 \quad \forall \rho, t \qquad (2')$$

Schritt 2: Finde "erlaubte Hyperfläche"

(Schnittmenge aller durch ZB festgelegten Hyperflächen)

Kettenregel

$$g_\alpha(x(q,t)) \overset{(41.2)}{=} 0 \;\; \forall\alpha: \;\Rightarrow\; 0 = \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial q_\kappa}(x(q,t),t) = \sum_{n=1}^{\tilde N} \lambda_\alpha \underbrace{\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}}_{Z^n_\alpha} \frac{\partial x_n}{\partial q_\kappa} \overset{(40.3)}{=} \underbrace{\vec Z_\alpha}_{(\perp HF_\alpha)} \cdot \underbrace{(\delta\vec x)_\kappa}_{(\parallel HF_\alpha)} \qquad (1)$$

$\forall \alpha = 1, \dots, R$, $\forall \kappa = 1, \dots, f$

$$\left[\sum_{n=1}^{\tilde N} A_n B_n = \vec A \cdot \vec B\right]$$

Def: "Virtuelle Verrückung":

$$(\delta\vec x)_\kappa \equiv \overbrace{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_\kappa}, \dots, \frac{\partial x_{\tilde N}}{\partial q_\kappa}\right)}^{\tilde N \text{ Komponenten}} = \frac{\partial \vec x}{\partial q_\kappa} \in \mathbb{R}^{\tilde N} \quad \kappa = 1, \dots, f \qquad (2)$$

= Vektor parallel zu allen HF $_\alpha$ also eine Koordinatenänderung, die keine der ZB verletzt!

Die virt. Verrückungen, $\kappa = 1, \dots, f$, bilden Basis für "erlaubte HF" am Punkt x:

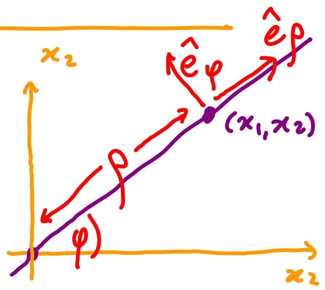
$$\mathrm{Span}\left\{\frac{\partial \vec x}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \vec x}{\partial q_f}\right\} \qquad (3)$$

= erlaubte Hyperfläche
= "Tangentenraum"
= Unterraum von $\mathbb{R}^{\tilde N}$

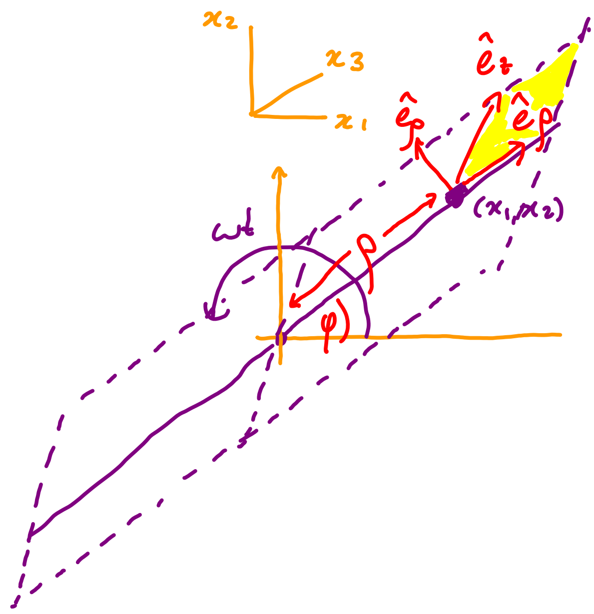
Beispiel:

$$(\delta\vec x)_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \rho}, \frac{\partial x_2}{\partial \rho}\right) = (\cos\varphi, \sin\varphi) = \hat e_\rho \qquad (2')$$

HF = $\hat e_\rho$-Achse (ändert sich mit t!) (3')



Beispiel in 3D: magnetische Scheibe auf rotierender Platte



Zylinderkoordinaten:

$$x_1 = \rho \cos\varphi$$
$$x_2 = \rho \sin\varphi$$
$$x_3 = z$$

Verallg. Koordinaten:

$$q_1 = \rho$$
$$q_2 = z$$

Virtuelle Verrückungen:

$$(\delta\vec{x})_1 \overset{(42.2')}{=} \left(\frac{\partial x_1}{\partial\rho}, \frac{\partial x_2}{\partial\rho}, \frac{\partial x_3}{\partial\rho}\right) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) = \hat{e}_\rho$$

$$(\delta\vec{x})_1 \overset{(42.2')}{=} \left(\frac{\partial x_1}{\partial z}, \frac{\partial x_2}{\partial z}, \frac{\partial x_3}{\partial z}\right) = (0, 0, 1) = \hat{e}_z$$

HF: aufgespannt durch $\hat{e}_\rho, \hat{e}_z$ = Platte!

Schritt 3: Projektion der Bwgl. auf erlaubte Hyperfläche

$$(L\vec{g}1)\cdot(\delta\vec{x})_K : \quad (\dot{\vec{p}} - \vec{K})\cdot(\delta\vec{x})_K \overset{(40.4)}{=} \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{R} \vec{Z}_\alpha\cdot(\delta\vec{x})_K}_{(42.1)\, =\, 0 \;\forall\alpha} = 0 \qquad (1)$$

"d'Alembertsches Prinzip": $(\dot{\vec{p}} - \vec{K})\cdot(\delta\vec{x})_K = 0$ Zwangsbedingungen sind somit komplett eliminiert!! (2)

Def: Verallg. Kraft: $Q_K \equiv \vec{K}\cdot(\delta\vec{x})_K$ (3)

für konservative $K_n = -\partial_n U(x)$

$$Q_K = \sum_n \overbrace{-\frac{\partial U(x(q,t),t)}{\partial x_n}}^{K_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_K} = -\frac{\partial U(q,t)}{\partial q_K} \qquad (4)$$

$$\boxed{\dot{\vec{p}}\cdot(\delta\vec{x})_K \overset{(1,3)}{=} Q_K \overset{(4)}{=} -\frac{\partial U(q,t)}{\partial q_K}} \qquad (5)$$

Beispiel:

$$(m\ddot{\vec{x}} + mg\,\hat{z}_2)\cdot\hat{e}_\rho \overset{(1')}{=} 0 : \qquad m(\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{y}\sin\varphi) = -mg\sin\varphi = -\frac{\partial U(\rho,t)}{\partial\rho} \qquad (5')$$

$\hat{e}_\rho$: $(\cos\varphi, \sin\varphi) = (42.2')$

$$U(\vec{x}) = mg x_2 \overset{(40.5')}{=} mg\rho\sin\varphi = U(\rho)$$

[unterschiedliche funktionale Abhängigkeiten !!]

Schritt 4: $\dot{\vec{p}}$ durch $q, \dot{q}, t$ ausdrücken:

Schritt 4a:

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}\vec{x}\,(q(t), t) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k}\overbrace{\frac{\partial q_k}{\partial t}}^{\dot{q}_k} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \dot{\vec{x}}\,(q, \dot{q}, t) \qquad (1)$$

$Ax + B = C$, $\frac{\partial C}{\partial x} = A$:

$\frac{\partial\,(1)}{\partial \dot{q}_k}$:

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \qquad \left[\text{Komponentenweise: } \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k}\right] \qquad (2)$$

Beispiel:

$$\vec{x} \overset{(41.1)}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \omega t \\ \rho \sin \omega t \end{pmatrix} \qquad (A)$$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} \overset{(A)}{=} \begin{pmatrix} \dot{\rho} \cos \omega t \\ \dot{\rho} \sin \omega t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho\omega \sin \omega t \\ \rho\omega \cos \omega t \end{pmatrix} \qquad (1')$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{\rho}} \overset{(1')}{=} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} \overset{(A)}{=} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho}\right) \quad ✓ \qquad (2')$$

Schritt 4: $\dot{\vec{p}}$ durch $q, \dot{q}, t$ ausdrücken:

Schritt 4b:

Kinetische Energie T sei durch $q, \dot{q}, t$ ausgedrückt:

$$T(q, \dot{q}, t) = T(\dot{x}(q, \dot{q}, t)) = \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \tfrac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2(q, \dot{q}, t) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial q_k} \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \overbrace{m_n \dot{x}_n}^{p_n} \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} = \vec{p} \cdot \boxed{\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_k}} \qquad \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial t}\vec{x} \qquad (2)$$

Kettenregel

$$\frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} \overset{(1)}{=} \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \vec{p} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{q}_k} \overset{(45.2)}{=} \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right] = \frac{d}{dt}\left[\vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k}\right] = \dot{\vec{p}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} + \boxed{\vec{p} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_k}} \qquad \frac{\partial^2}{\partial_t \partial q_k}\vec{x} \qquad (4)$$

(4) − (2):

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right] - \frac{\partial T}{\partial q_k}}_{} \overset{(42.2)}{=} \dot{\vec{p}} \cdot (\delta \vec{x})_k \qquad (5)$$

Projektion von $\dot{\vec{p}}$ auf die virtuelle Verrückung $(\delta \vec{x})_k$

Beispiel:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot\rho \cos\omega t \\ \dot\rho \sin\omega t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho\omega \sin\omega t \\ \rho\omega \cos\omega t \end{pmatrix} \qquad (45.1')$$

(Seite 34)

$$m(\dot\rho^2 + \omega^2\rho^2) = T(\rho,\dot\rho) = \tfrac{1}{2} m \left(\dot x_1^2 + \dot x_2^2\right) \qquad (1')$$

$$m\rho\omega^2 = \frac{\partial T}{\partial \rho} = m\left(\dot x_1 \frac{\partial \dot x_1}{\partial \rho} + \dot x_2 \frac{\partial \dot x_2}{\partial \rho}\right) = m\left(-\dot x_1 \omega \sin\omega t + \dot x_2 \omega \cos\omega t\right) \qquad (2')$$

$$m\dot\rho = \frac{\partial T}{\partial \dot\rho} = m\left(\dot x_1 \frac{\partial \dot x_1}{\partial \dot\rho} + \dot x_2 \frac{\partial \dot x_2}{\partial \dot\rho}\right) = m\left[\dot x_1 \cos\omega t + \dot x_2 \sin\omega t\right] \qquad (3')$$

$$m\ddot\rho = \frac{d}{dT}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot\rho}\right] = m\ddot x_1 \cos\omega t - m\dot x_1 \omega \sin\omega t \qquad (4')$$

$$+ m\ddot x_2 \sin\omega t + m\dot x_2 \omega \cos\omega t \qquad (5')$$

$$m(\ddot\rho - \rho\omega^2) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot\rho}\right] - \frac{\partial T}{\partial \rho} = m\left(\ddot x_1 \cos\omega t + \ddot x_2 \sin\omega t\right) = m\ddot{\vec{x}} \cdot \hat e_\rho$$

Damit haben wir (36.4) reproduziert!

Schritt 5: Kombiniere Ergebnisse von Schritten 3 und 4:

Schritt 4 Schritt 3

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \overset{(46.5)}{=} \dot{\vec{p}} \cdot (\delta \vec{x})_k \overset{(44.5)}{=} -\frac{\partial U}{\partial q_k} \qquad (1)$$

Satz: Für geschwindigkeitsunabhängige Potentiale, mit $\frac{\partial U}{\partial \dot q_k} = 0$ (2)

gilt: $$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T - \overset{(2)\,\to\,=0}{U})}{\partial \dot q_k}\right] \overset{(1)}{=} \frac{\partial (T-U)}{\partial q_k} \qquad (3)$$

Definiere "Lagrange-Funktion": $$L(q,\dot q,t) = T(q,\dot q,t) - U(q,\dot q,t) \qquad (4)$$

Lagrange-Gl. 2. Art: $$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \overset{(3)}{=} \frac{\partial L}{\partial q_k}, \qquad k = 1,\dots,f} \qquad (5)$$

□