Krummlinige Koordinaten

Für 1 Teilchen: $$x_n = x_n(q) \qquad (43.1)$$

z.B. Polar: (ρ, φ, z)

Kugel: (r, θ, φ)

(43.2)

Dann: $$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_n \dot{x}_n = \frac{1}{2} m \underbrace{\frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j}}_{\equiv\, g_{ij}} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} m\, g_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$g_{ij} \equiv$ "metrischer Tensor" (43.3)

Grund für diesen Namen: $$ds^2 = dx_n\, dx_n = \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j}\, dq_i\, dq_j = g_{ij}\, dq_i\, dq_j$$

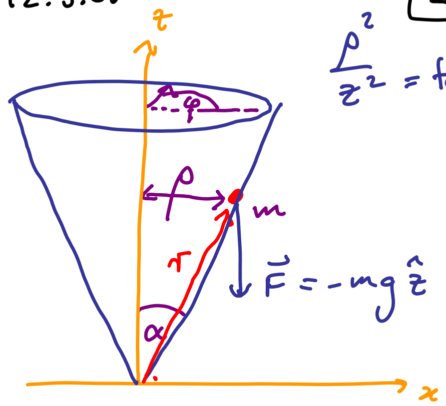
Nachrechnen ! : $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

(43.4) $$g_{ij}^{\text{Cartesisch}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \qquad g_{ij}^{\text{Polar}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \rho^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad (43.5)$$

$$g_{ij}^{\text{Kugel}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad (43.6)$$

Beispiel: Massenpunkt auf Kreiskegel

(V6) 12.5.05



$$\frac{\rho^2}{z^2} = \tan^2\alpha$$

ZB: $$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 \tan^2\alpha = 0$$

Wahl v. q's: (Kugelkoordinaten) (r, θ, φ), $\theta = \alpha =$ fest

(r, φ)

(Alternativen (z, φ), (ρ, φ) auch OK).

$$x = x(r,\varphi) = r \sin\alpha \cos\varphi \qquad (43.1)$$

$$y = y(r,\varphi) = r \sin\alpha \sin\varphi \qquad (43.2)$$

$$z = z(r,\varphi) = r \cos\alpha \qquad (43.3)$$

Bestimmung v. L:

$$T = \frac{1}{2} m \underbrace{g_{ij}^{\text{Kugel}}}_{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \cancel{r^2 \dot{\theta}^2} + r^2 \sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2 \right)$$

L44

$=0$, denn $\theta = \alpha$

(44.4)

$$\mathcal{U} = mgz = mgr\cos\alpha \qquad (44.5)$$

(44.6)

$$L = (r, \dot{r}, \cancel{\varphi}, \dot{\varphi}) = L = T - \mathcal{U} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\alpha \, \dot{\varphi}^2 \right) - mgr\cos\alpha$$

$\rho = r \sin\alpha$

unabhängig v. φ! $\Rightarrow$ φ ist zyklisch!

$m\rho\underbrace{\rho\dot{\varphi}}_{v_\varphi} = m\rho v_\varphi = L_z$

Erhaltener verallg. Impuls:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \overset{(44.6)}{=} m r^2 \sin^2\alpha \, \dot{\varphi} \equiv \ell} \qquad (44.7)$$

LL45

Lg2:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}}_{m\dot{r}} \Bigg) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}$$

$$= m\ddot{r} - \left(m r \sin^2\alpha \, \dot{\varphi}^2 - mg\cos\alpha \right) \qquad (45.1)$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{m r^2 \sin^2\alpha \, \dot{\varphi}}_{\ell} \Big) = 0 \qquad (45.2)$$

(44.7)

Energieerhaltung: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \overset{(44.6)}{=} 0$, $\frac{\partial x_n}{\partial t} \overset{(43.1-3)}{=} 0$, $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \Rightarrow$

(45.3)

$$\text{const.} = \boxed{E = T + \mathcal{U} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\alpha \right) + mgr\cos\alpha}$$

Lösung der Bwgsgl.

(46.7) für ℓ löst (45.2) !

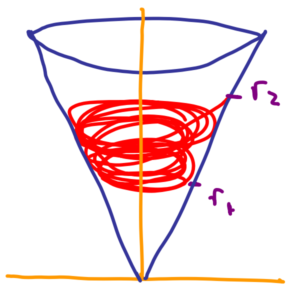
Eliminiere $\dot\varphi$:

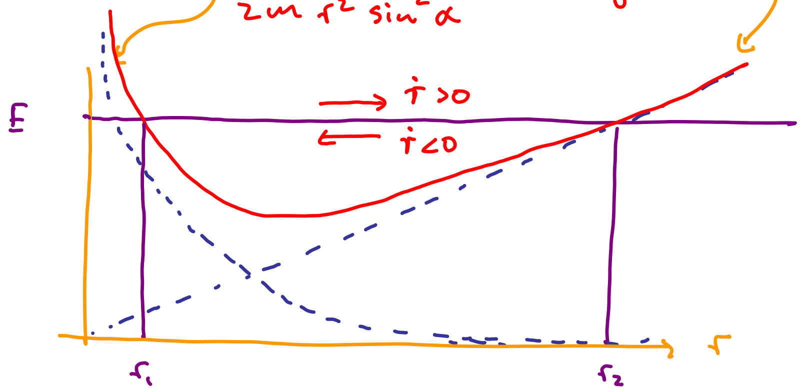
$$\dot\varphi \overset{(46.7)}{=} \frac{\ell}{m r^2 \sin^2\alpha} \qquad (46.1)$$

(46.1) in (45.3):

$$E = \tfrac{1}{2} m \dot r^2 + U_{eff}(r) \qquad (46.2)$$

$$U_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2m r^2 \sin^2\alpha} + m g r \cos\alpha$$





$\dot r = \frac{dr}{dt} = ?$

$$\dot r \overset{(46.2)}{=} \pm \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r)\right)} \qquad (47.1)$$

zwei Lösungen, im Folgenden durch "$\pm$" unterschieden.

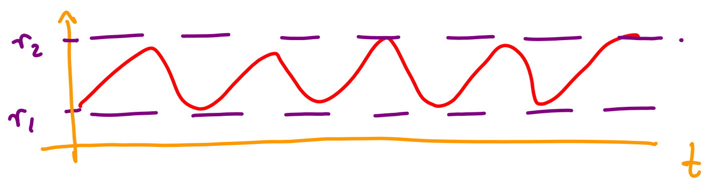
Trennung der Variablen und Integrieren:

$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} dt' = \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr'}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r')\right)}} \qquad (47.2)$$

$$t = \text{Funktion v. } r \equiv t^{(\pm)}(r) = \text{bekannt} \qquad (47.3)$$

Invertieren:

$$r = r^{(\pm)}(t) \quad \text{auch bekannt} \qquad (47.4)$$



$\varphi(t) = ?$ L48

$\dot\varphi \overset{(46.1)}{=} \frac{\ell}{m r^2 \sin^2\alpha} = \frac{d\varphi}{dt}$

$$\varphi(t) - \varphi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi' = \int_{t_0}^{t} dt' \frac{\ell}{m\, r^2(t) \sin^2\alpha} \qquad (48.1)$$

(47.4) einsetzen

= bekannte Funktion v. t

Integrationskonstanten: festgelegt durch Anfangsbed:

$r_0 = r(t_0)$, $\varphi_0 = \varphi(t_0)$, $\dot r(t_0)$, $\dot\varphi(t_0) \overset{(46.1)}{=} \frac{\ell}{m r_0^2 \sin^2\alpha}$

aus (47.1)

oder alternativ: ℓ, E, r_0, φ_0

$\boxed{\text{Jeder Erhaltungssatz legt eine Integrationskonstante fest!}}$

Bahn: $r = r(\varphi)$? L49

Bereits bekannt: $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$

$t = t(\varphi)$

$= r(\varphi)$

Eliminiere t:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\varphi} = \frac{dr/dt}{d\varphi/dt} = \dot r / \dot\varphi \qquad (49.1)$$

(47.1) (46.1)

$$= \left[\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r)\right)}\; \frac{1}{\ell}\, m r^2 \sin^2\alpha \right] \qquad (49.2)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi(r)} d\varphi' = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{[\quad]} \qquad (49.3)$$

= Bekannte Funktion v. r

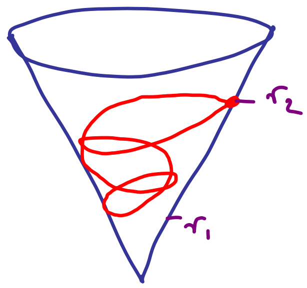
$\Rightarrow \varphi = \varphi(r)$ = bekannt, $\Rightarrow r = r(\varphi)$ bekannt

L50

Wann ist Bahn geschlossen?

Falls $\varphi(T+t_0) = \varphi(t_0)$

$r(T+t_0) = r(t_0)$, etc.



Dauer von

$r_2 \to r_1 \to r_2 : T$

Hängt von α, ℓ, E, etc. ab.

Falls Bewegung periodisch ist: was ist Periode?

Periode:

$$\boxed{T = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r')\right)}}} \qquad (50.1)$$

L51

Erhaltungssätze und Symmetrien

Invarianz unter Raumtranslationen:

$$\vec{r}_\nu \longrightarrow \vec{r}_\nu{}' = \vec{r}_\nu + \varepsilon\vec{\eta} \qquad \forall\ \nu = 1, \dots, N \qquad (51.1a)$$

gleiche Verschiebung $\forall\ \nu$.

$$\dot{\vec{r}}_\nu \rightarrow \dot{\vec{r}}_\nu{}' = \dot{\vec{r}}_\nu \qquad (51.1b)$$

Falls L invariant ist unter (51.1):

$$\mathcal{L}(\cancel{\vec{r}_\nu}, \dot{\vec{r}}_\nu, t) = \mathcal{L}(\vec{r}_\nu{}', \dot{\vec{r}}_\nu{}', t) \qquad \forall\ \varepsilon, \vec{\eta} \qquad (51.2)$$

$$= \mathcal{L}(\vec{r}_\nu + \varepsilon\vec{\eta}, \dot{\vec{r}}_\nu, t)$$

$\forall\ \varepsilon \to 0$:

$$= \cancel{\mathcal{L}(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t)} + \sum_\nu \varepsilon\vec{\eta}\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_\nu}\Big|_{\varepsilon\vec{\eta}=0}$$

dann

$$0 = \sum_\nu \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_\nu}} \cdot \vec{\eta}$$

$$\overset{(Lg2)}{=} \vec{\eta} \cdot \sum_\nu \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}\right)\right) = \vec{\eta} \cdot \frac{d}{dt} \sum_\nu \vec{p}_\nu \Rightarrow \vec{P} = \sum_\nu \vec{p}_\nu = \text{erhalten!}$$

$\equiv \vec{p}_\nu \leftarrow$ Definition!

Zyklische Koordinate ist $\vec{R} = \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu$ = Schwerpunktskoordinate

L52

Invarianz unter Rotationen

$$\vec{r}_\nu \to \vec{r}_\nu' = \vec{r}_\nu + (\vec{n} \times \vec{r}_\nu)\varepsilon \qquad (52.1a)$$

(Änderung $\perp$ zu $\vec{r}$ $\Rightarrow$ Rotation)

$$\dot{\vec{r}}_\nu \to \dot{\vec{r}}_\nu' = \dot{\vec{r}}_\nu + (\vec{n} \times \dot{\vec{r}}_\nu)\varepsilon \qquad (52.1b)$$

Falls L invariant ist unter (52.1):

$$\mathcal{L}(\cancel{\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu}, t) = \mathcal{L}(\vec{r}_\nu', \dot{\vec{r}}_\nu', t)$$

$$= \mathcal{L}(\vec{r}_\nu + (\vec{n} \times \vec{r}_\nu)\varepsilon, \dot{\vec{r}}_\nu + (\vec{n} \times \dot{\vec{r}}_\nu)\varepsilon, t) \qquad (52.2)$$

Entwickle in ε um den Punkt $\varepsilon = 0$:

$$= \cancel{\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}_\nu, t)} + \varepsilon \sum_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_\nu} \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_\nu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \cdot (\vec{n} \times \dot{\vec{r}}) \right]$$

$$0 = \sum_\nu \frac{d}{dt}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}}_{\vec{p}_\nu}\Bigg) \cdot \vec{n} \times \vec{r}_\nu + \vec{p}_\nu \cdot \frac{d}{dt}(\vec{n} \times \vec{r})$$

Produktregel rückwärts

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Drehimpuls-Erhaltung !!}}$

$$= \sum_\nu \frac{d}{dt}\left[\vec{p}_\nu \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_\nu) \right] = \vec{n} \cdot \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_\nu (\vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu)}_{\vec{L}} = \vec{n} \cdot \frac{d}{dt} \vec{L} \qquad (52.3)$$

L53

Invarianz unter Zeitverschiebungen

$$t \to t' = t + \varepsilon \qquad (53.1)$$

Falls L invariant ist unter (53.1):

$$\mathcal{L}(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) = \mathcal{L}(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t')$$

$$= \mathcal{L}(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t + \varepsilon) \qquad (53.2)$$

Entwickle in ε um den Punkt $\varepsilon = 0$:

$$= \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}_\nu, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0. \qquad (53.3)$$

Betrachte nun totale Zeitableitung:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) = \sum_\nu \Bigg[\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_\nu}}_{(LG2) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}\right)} \cdot \dot{\vec{r}}_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \cdot \ddot{\vec{r}}_\nu \Bigg] + \underbrace{\cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}}_{(53.3)\ =0} \qquad (53.4)$$

$$= \frac{d}{dt}\Bigg[\sum_\nu \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}}_{\vec{p}_\nu} \cdot \dot{\vec{r}}_\nu \Bigg]$$

$\vec{p}_\nu$ = verallg. Impuls = (39.1)

(53.3) (53.4)

L54

$$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\sum_\nu \vec{p}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu - \mathcal{L}}_{\equiv H \,=\, \text{"Hamilton-Funktion"}}\Big] = 0 \tag{54.1}$$

Modell: $\vec{p}_\nu = m\dot{\vec{r}}_\nu$

(bisher übliche Fall)

$$H = \sum_\nu m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} - \Big(\sum_\nu \tfrac{1}{2} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} - U\Big) \tag{54.2}$$

$$= \sum_\nu \tfrac{1}{2} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} + U \tag{54.3}$$

Interpretation:
Hamilton-Funktion = Energie!

$$= T + U = E = \text{Energie} \tag{54.4}$$

Energie-Erhaltungssatz: $\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt} H = 0}$ (54.5)

Gilt entlang der 3N-Trajektorie die durch LG2 festgelegt wird.