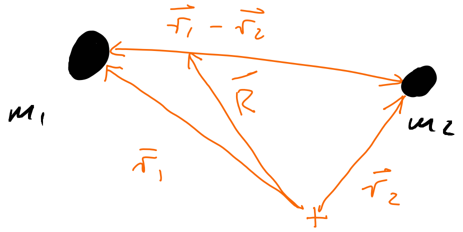
Zentralpotential

V13 31.05.07

ZP1

Zweikörperproblem



$$L_{tot}(\vec r_1, \vec r_2, \dot{\vec r}_1, \dot{\vec r}_2) =$$

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{\vec r}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec r}_2^{\,2} - U(\vec r_1 - \vec r_2) \quad (1)$$

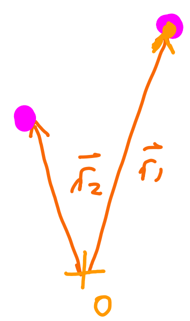
	Symmetrie	Erhaltungsgröße	Vereinfachung
1.	Translation	Schwerpunktsimpuls	Einteilchenproblem
2.	Zeit transl.	Energie	Dgl. 1. Ordnung
3.	Rotationsinv.	Drehimpuls	Radialgl.

ZP2

Schwerpunktskoordinate: $\vec R =$ (1)

Relativkoordinate: $\vec r =$ (2)

(1), (2) in (1.1): $L_{tot} =$ (3)



$M =$, $\mu =$ "reduzierte Masse" (4)

Sehr nützliche Vereinfachung: Dynamik von R und r entkoppelt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec R}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec R} = 0$$

$\vec R \overset{(3)}{=}$ zyklisch $\Rightarrow$ = Schwerpunktimpuls ist erhalten

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(M\dot{\vec R}) =$$

$\Rightarrow$ (5)

Relativkoordinate: $L \overset{(2.4)}{=} \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(r)$ Einteilchenproblem! ZP3

(1)

Zylinderk.: $\vec{r} : =$ (2)

$$L = L(\rho, \varphi, z, \dot\rho, \dot\varphi, \dot z) = \tag{3}$$

EL:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\rho} = \frac{\partial L}{\partial \rho} \Rightarrow \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow \tag{5}$$

Drehimpuls-erhaltung!

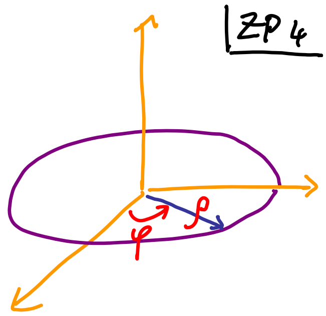
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot z} = \frac{\partial L}{\partial z} \Rightarrow \tag{6}$$

Reduktion zur Radialgleichung

ZP4

Triviale Lösung v. (3.6): (1)

$\Rightarrow$ Bewegung nur in Ebene



Offensichtliche Lösung v. (3.5): $\mu \rho^2 \dot\varphi$ (2)

(1), (2) entspricht der Wahl:

Drehimpulsvektor: $\vec{\ell} = \mu\, \vec{r} \times \dot{\vec{r}} =$ (3)

ZP5

Radial-Gleichung: (3.4) $\mu\ddot{\rho} = \mu\rho\dot{\varphi}^2 - \partial_\rho U$ (1)

$l \overset{(4.2)}{=} \mu\rho^2\dot{\varphi}$ (3)

$\overset{(4.2)}{=}$ (2)

"Zentrifugalkraft" (favorisiert große ρ)

Energieerhaltung:

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \overset{(L54.1)}{\Longrightarrow}$ $\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) =$ (4)

$L = \frac{\mu}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho)$

$E = \mu(\quad) - \left[\frac{\mu}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho)\right]$ (5)

$=$ (6)

ZP6

Erhaltene Energie: $E \overset{(5.6)}{=}$ (1)

(1) ist DGL 1. Ordnung für $\rho(t)$

"Effektives Potential für Radialbewegung"

Effektive Radialkraft: $-\partial_\rho U_{eff} =$ (2)

Wir kennen nun im Prinzip: $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_{cp} t$, $\rho(t)$ aus (6.1); $\varphi(t)$ aus (4.2) $\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu\rho^2}$; $z(t)$ aus (4.1) $z(t) = 0$ (3)

Zahl der Integrations-Konstanten:

Allgemein erwartet:

Lösung v. 3 DGL 2. Ord für je $\vec{r}_1(t)$ und $\vec{r}_2(t)$ erfordert 12 Int.-Konst: $\vec{r}_1(0), \dot{\vec{r}}_1(0), \vec{r}_2(0), \dot{\vec{r}}_2(0)$

Wir haben hier: (4)

ZP7

Lösung v. Radialgl.:

(6.1) : $E = \frac{\mu}{2}\dot{\rho}^2 + U_{eff}(\rho)$ (1)

$\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho} =$ (8.1) (2)

Separation d. Variablen:
Integriere:

$$dt = \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U_{eff}(\rho)]}} = \text{Funktion von} \quad (3)$$

$\rho(t)$:

$\Rightarrow t$ bekannt, (4)

diese Relation invertieren $\Rightarrow \rho$ bekannt! (5)

$\varphi(t)$:

$\rho(t)$ eingesetzt in $\dot{\varphi} \overset{(4.2)}{=} \frac{\ell}{\mu\rho^2} \Rightarrow \dot{\varphi}$ bekannt! (6)

Integrieren, $\Rightarrow \varphi$ bekannt ! (7)

ZP8

Bahnkurve: $\rho = \rho(\ )$ (ohne Zeitabhängigkeit anzugeben)

Analog zu (L49.1) :

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{d\rho} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} \quad (1)$$

Separation d. Variablen:
Integration:

$$d\varphi = \frac{d\rho\ (\ell/\mu\rho^2)}{\pm\left[\frac{2}{\mu}(E - U_{eff}(\rho)\right]^{1/2}} \quad (2)$$

$=$ Funktion v.

φ bekannt (3)

Diese Relation invertieren $\Rightarrow \rho$ bekannt. (4)

Qualitative Diskussion der Bewegung (WICHTIG!)

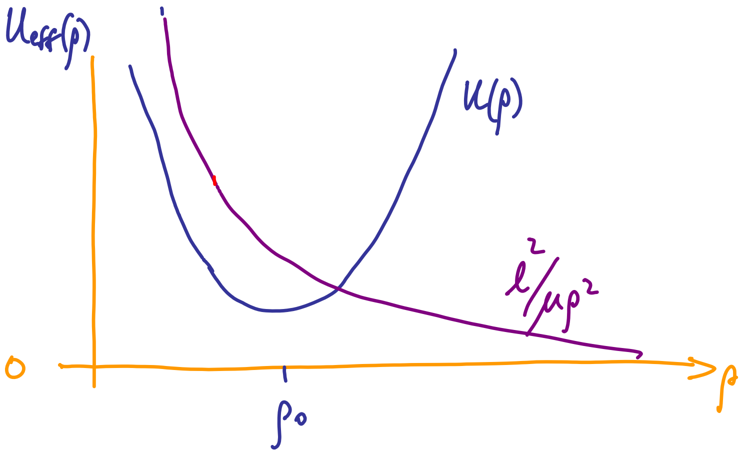
ZP9

Typischer Fall 1:

z.B. für

$U(\rho) = \alpha(\rho-\rho_0)^2$

Harmonische Osz. mit Gleichgewichtsabstand ρ_0 (z.B. Vibs. eines 2-atomigen Moleküls)



für $\left.\begin{array}{l}\rho \to \infty \\ \to 0\end{array}\right\}$ $U_{eff}(\rho) \to$ $\quad$ $\left\{\begin{array}{l}\text{nur "gebundene" Bewegung möglich}\end{array}\right.$ (1)

Umkehrpunkte bei (2)

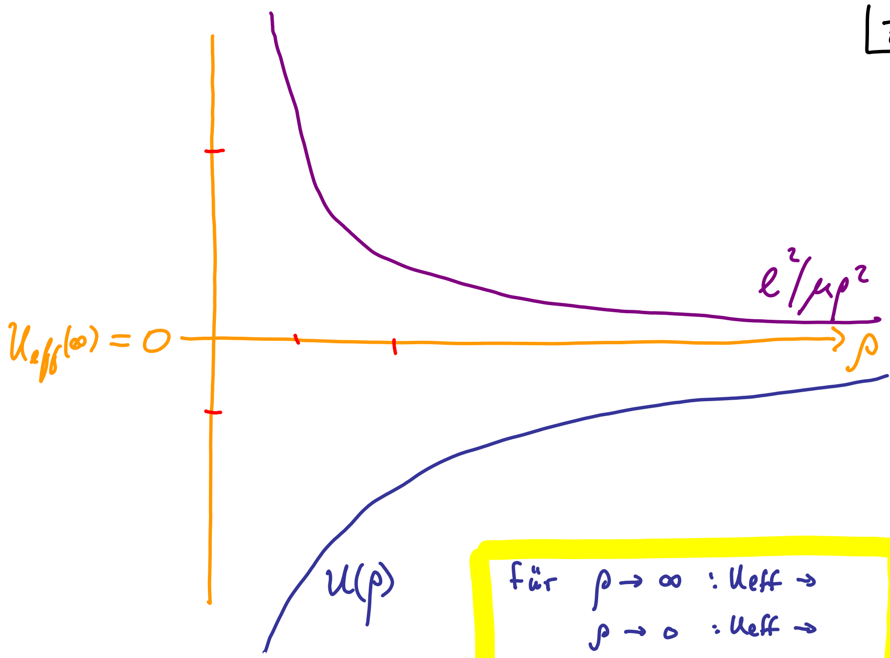
Typischer Fall 2:

ZP10

z.B. für

$U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho}$

Gravitations- oder Coulomb-Potential



für $\rho \to \infty$: $U_{eff} \to$
$\rho \to 0$: $U_{eff} \to$
$\rho =$: $U_{eff} =$

2 Arten von Bewegung sind möglich:

(i) $E_1 > U_{eff}(\infty)$: ungebundene Bewegung „Streuung durch Zentrifugalbarriere"

hier $=0$ gemalt

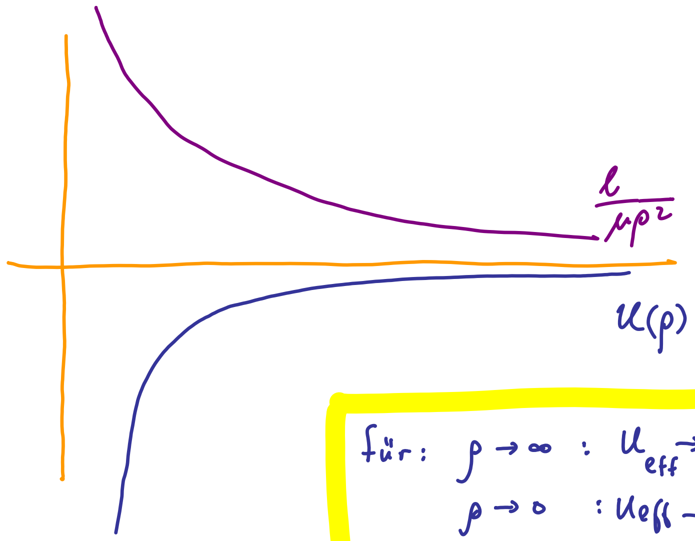
(ii) $E_2 < U_{eff}(\infty)$: gebundene Bewegung

ZP 11

Typischer Fall 3:

z.B.: für

$$\mathcal{U}(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho^3}$$



$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{für:} & \rho \to \infty & : \mathcal{U}_{eff} \to \\ & \rho \to 0 & : \mathcal{U}_{eff} \to \\ & \rho = & : \mathcal{U}_{eff} = \end{array}}$$

3 Arten v. Bewegung sind möglich:

(i) Streuung: (immer) Umkehrpunkt

(ii) Gebundene Bewegung:

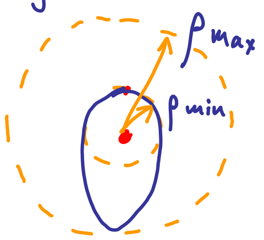
(iii) Fall ins Zentrum (läuft durch's Zentrum hindurch)

ZP 12

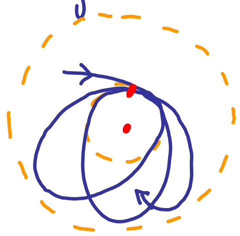
Gebundene Bwg: ist Bahn geschlossen oder nicht?

$\Delta\varphi$ sei Winkeländerung zwischen $\rho =$

geschlossen:



ungeschlossen:



Bedingung für geschlossene Bwg:

Bahn schließt nach n Schleifen: (1)

$$\varphi - \varphi_0 \overset{(8.2)}{=} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho' \, (\ell/\mu\rho'^2)}{\left[\frac{2}{\mu}\left(E - \mathcal{U}_{eff}(\rho')\right)\right]^{1/2}} \qquad (2)$$

hängt v. $\mathcal{U}$ ab

Nachrechnen:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} \text{für} \quad \mathcal{U} = & \overset{(2)}{\Rightarrow} n = \quad \Rightarrow \text{Bahn ist Ellipse} \\ \text{für} \quad \mathcal{U} = & \Rightarrow n = \quad \Rightarrow \text{Bahn schließt nach 2 Schleifen} \end{cases} \qquad (3)$$

<u>Keplerproblem</u> (Fließbach, Kap. 17)

ZP13

Gravitations- oder Coulomb-Pot.:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad \text{z.B.:} \quad \alpha = \begin{cases} G m_1 m_2 & \text{Grav.Pot} \\ -q_1 q_2 & \text{Coulomb-Pot} \end{cases} \tag{1}$$

Effektives Pot.:

$$U_{eff}(\rho) \overset{(7.1)}{=} \tag{2}$$

Für diese Form ist Bahnkurve lösbar!

(8.2):

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho' \; (\ell/\mu\rho'^2)}{\left\{ \frac{2}{\mu} \left(E - \qquad \right) \right\}^{1/2}} \tag{3}$$

$$\boxed{\varphi - \varphi_0 \overset{\text{Bronstein}}{=} \arccos \left\{ \frac{\ell/\rho - \mu\alpha/\ell}{\left[2\mu E + \mu^2 \alpha^2 / \ell^2 \right]^{1/2}} \right\} + \text{konst.}} \tag{4}$$

durch Wahl v. φ_0

ZP14

Definition:

Parameter: $p = \frac{\ell^2}{\mu\alpha}$, (1)

Exzentrizität: $\varepsilon = \left[1 + \frac{2 E \ell^2}{\mu \alpha^2} \right]^{1/2}$ (2)

cos[(13.4)]:

$$\cos\varphi = \frac{\ell/\rho - \mu\alpha/\ell}{\left[2\mu E + \frac{\mu^2 \alpha^2}{\ell^2} \right]^{1/2}} \tag{3}$$

$$\frac{1}{p} \cos\varphi = \left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{p} \right] \frac{1}{\varepsilon} \tag{4}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{p} \left[1 + \varepsilon \cos\varphi \right] \tag{5}$$

Bahnkurve: (durch clevere Ausnutzung von E- und ℓ-Erhaltung)

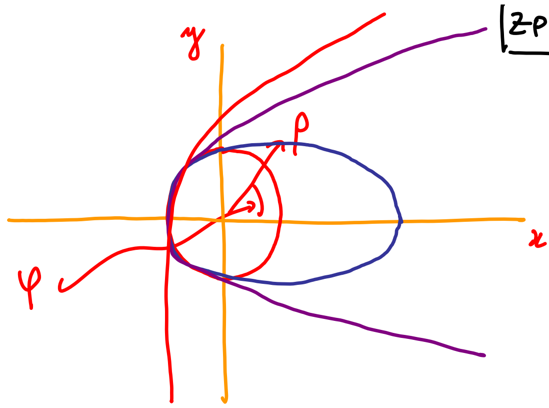
$$\boxed{\rho(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}} \tag{6}$$

ZP 15

(14.6) beschreibt Kegelschnitte:

$$\rho(\varphi) \overset{(14.6)}{=} \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$$\varepsilon \overset{(14.2)}{=} \left[1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}\right]^{1/2}$$



(i) $E > 0 \overset{(14.2)}{\Rightarrow}$ $\Rightarrow$ (1)

(ii) $E = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$

$\left.\right\}$ $\varepsilon\cos\varphi \to$ möglich $\Rightarrow$ möglich

(iii) $E < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \rho_{max} = \\ \rho_{min} = \\ \Delta\varphi = \end{cases}$ (2)

(iv) $E = -\frac{\mu\alpha^2}{2\ell} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ ρ unabhängig von φ (3)

ZP 16

Ellipse:

Bahngleichung:

$$a \equiv \frac{p}{1-\varepsilon^2} \quad (3)$$

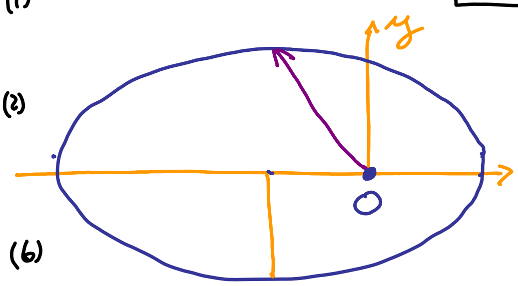
große } Halbachse
kleine }

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad (4)$$

$$= \sqrt{pa} \quad (5)$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\rho} \quad (1)$$

$$\rho \overset{(14.6)}{=} \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi} \quad (2)$$



$$p = \rho + \varepsilon \overbrace{\rho\cos\varphi}^{x} \quad (6)$$

"Perihel"
"Brennpunkt"

$$(p - \varepsilon x)^2 = \rho^2 = x^2 + y^2 \quad (7)$$

$$p^2 = x^2(1-\varepsilon^2) + 2\varepsilon x p + y^2 \quad (8)$$

$$= (1-\varepsilon^2)\Big[x + \overbrace{\frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}}^{\varepsilon a}\Big]^2 - \overbrace{\frac{\varepsilon^2 p^2}{1-\varepsilon^2}}^{\varepsilon^2 b^2} + y^2 \quad (9)$$

$$\times\ \frac{(1-\varepsilon^2)}{p^2} = \frac{1}{b^2} : \quad \underbrace{\frac{(p^2+\varepsilon^2 b^2)}{b^2}}_{(p^2/b^2 + \varepsilon^2) = 1} = \underbrace{\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{p^2}}_{1/a^2}(x+\varepsilon a)^2 + \frac{y^2}{b^2} \quad (10)$$

ZP17

(16.10) = Ellipse: $$\boxed{\frac{(x+\varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (1)$$

Check Skizze:

$x = 0$: $$y^2 = (1-\varepsilon^2)\,b^2 = p^2 \quad ✓ \qquad (2)$$

$x = -a\varepsilon$: $$y^2 = b^2 \quad ✓ \qquad [b = \text{kleine Halbachse}] \qquad (3)$$

$y = 0$: $$x^2 + 2\varepsilon a x + a^2(\varepsilon^2 - 1) = 0 \qquad (4)$$

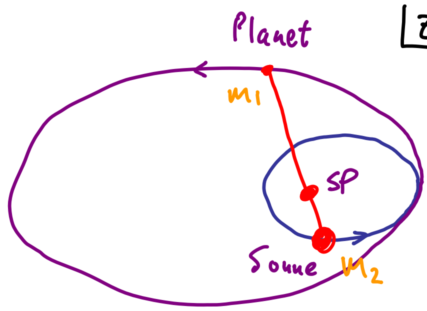
$$x = -\varepsilon a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4\varepsilon^2 a^2 - 4a^2(\varepsilon^2-1)} \qquad (5)$$

$$= -\varepsilon a \pm a = a \begin{Bmatrix} 1-\varepsilon \\ -1-\varepsilon \end{Bmatrix} \quad ✓ \qquad (6)$$

ZP18

Keplerschen Gesetze:

1. Planetenbahnen sind Ellipsenbahnen mit Sonne in einem Brennpunkt.



im SP-System

Herleitung: $$\vec r_{Sonne} := \vec r_2 \overset{(4.5)}{=} \vec R - \frac{m_1}{M}\vec r \qquad (1)$$

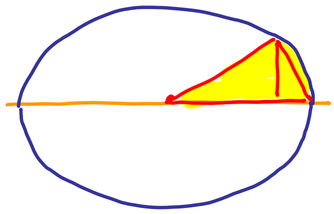
$\lesssim 10^{-3}$, sogar für Jupiter.

$$\vec r_{Planet} := \vec r_1 = \vec R + \frac{m_2}{M}\vec r \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ $\vec r_{Sonne}$, $\vec r_{Planet}$ beschreiben gegenläufige Ellipsen;

Schwerpunkt liegt in einem Brennpunkt.

2. Die vom Fahrstrahl pro Zeit überstrichene Fläche dF ist konstant



ZP19

Fläche des Dreiecks

Herleitung: $\Delta F =$ (1)

3. Quadrat der Umlaufzeit ist proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse.

Herleitung:

Fläche der Ellipse: $\pi ab = F =$ (2)

ap (16.5) (14.1) μ/α

$T = 2\pi a \cdot b\mu/\ell$ (3)

$b^2 (\mu/\ell)^2 =$

$=$

$$\frac{\mu}{\alpha} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \cdot \frac{1}{G m_1 m_2} =$$ (4)

$=$ etwa gleich für alle Planeten.