

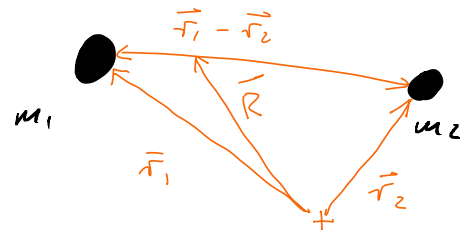
Zentralpotential

V13

31.05.07

(ZP1)

Zweikörperproblem



$$L_{\text{tot}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) =$$

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (1)$$

Symmetrie

1. Translation
2. Zeit transl.
3. Rotationsinv.

Erhaltungsgröße

- Schwerpunktsimpuls
Energie
Drehimpuls

Vereinfachung

- Einteilchenproblem
Dgl. 1. Ordnung
Radialgl.

Schwerpunktskoordinate:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Relativkoordinate:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad r \equiv |\vec{r}| \quad (2)$$

(1), (2) in (1.1);

$$L_{\text{tot}} = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2}_{L_H(\vec{R})} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(r)}_{L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})} \quad (3)$$

$$M = m_1 + m_2$$

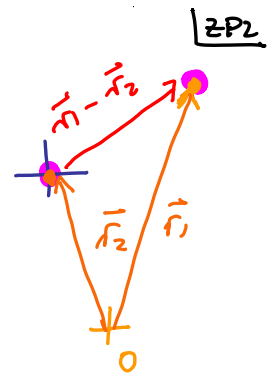
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

"reduzierte Masse" (4)

Sehr nützliche Vereinfachung: Dynamik von $\vec{R}$ und $\vec{r}$ entkoppelt

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} \right) &\stackrel{L_H}{=} \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (M \dot{\vec{R}}) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{R} \stackrel{(3)}{=} \text{zyklisch} \Rightarrow \vec{P} = M \dot{\vec{R}} = \text{Schwerpunktimpuls ist erhalten}$$

$$\Rightarrow \vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{v}_{\text{sp}} t \quad (5)$$



Relativkoordinate:

$$L^{(2.4)} = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

Einteilchenproblem! ZP3
(1)

Zylinderk:

$$\vec{r} = (\rho, \varphi, z), \quad r^2 = \rho^2 + z^2 \quad (2)$$

$$L = L(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{1}{2} \mu (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) \quad (3)$$

EL:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{\partial L}{\partial \rho} \Rightarrow \mu \ddot{\rho} = \mu \rho \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial \rho} \quad (4)$$

φ ist zyklisch:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\underbrace{\mu \rho^2 \dot{\varphi}}_l) = 0 \quad \begin{matrix} (5) \\ \text{Drehimpuls-} \\ \text{erhaltung!} \end{matrix} \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} \Rightarrow \mu \ddot{z} = - \frac{\partial U}{\partial z} = U'(r) \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad (6)$$

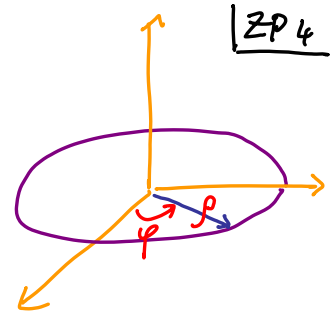
Reduktion zur Radialgleichung

Triviale Lösung v. (3.6):

$$z(t) = 0$$

(1)

$\Rightarrow$ Bewegung nur in x - y Ebene



Offensichtliche

Lösung v. (3.5):

$$\mu \rho^2 \dot{\varphi} = l = \text{konst} = \text{erhaltene Drehimpuls} \quad (2)$$

(1), (2) entspricht der Wahl: $\hat{z}$ -Achse $\parallel$ Drehimpulsvektor.

Drehimpulsvektor:

$$\vec{l} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = l \hat{z} \quad (3)$$

Lösung v. Radial-Gl:

$$(6.1) : E = \frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho)$$

(1) ZP7

Diff. Gl. 1. Ordnung f. ρ :

$$\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho} = \pm \left[\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(\rho)) \right]^{1/2} \quad (8.1) \quad (2)$$

Separation d. Variablen:
Integriere:

$$t - t_0 = \int_{t_0}^t dt' = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U_{\text{eff}}(\rho')]} } = \text{Funktion von } \rho \quad (3)$$

$\rho(t)$:

$$\Rightarrow t = t^{(\pm)}(\rho) \text{ bekannt,} \quad (4)$$

$$\text{diese Relation invertieren} \Rightarrow \rho = \rho(t) \text{ bekannt!} \quad (5)$$

$\varphi(t)$:

$$\rho(t) \text{ eingesetzt in } \dot{\varphi} \stackrel{(4.2)}{=} \frac{L}{\mu \rho^2} \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t) \text{ bekannt!} \quad (6)$$

Diff. 1. Ordnung f. φ

$$\text{Integrieren, } \Rightarrow \varphi = \varphi(t) \text{ bekannt!} \quad (7)$$

Zwischenbeispiel:

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{dt}{d\rho} \right)^{-1} \quad (1)$$

$$\text{Sei } \rho = t^2 \Rightarrow$$

$$t = \sqrt{\rho}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 2t$$

$$\frac{dt}{d\rho} = \frac{1}{2\sqrt{\rho}} = \frac{1}{2t}$$

$$\Rightarrow (1) \text{ gilt}$$

Plausibilitätsargument:

$$\text{sei } \rho = \rho(t(r)) ; t = t(\rho)$$

$$\text{dann } \frac{d\rho}{dr} = \frac{d\rho}{dt} \frac{dt}{dr} \quad (\text{Kettenregel})$$

Falls: $r = \rho$:

$$1 = \frac{d\rho}{d\rho} = \frac{d\rho}{dt} \frac{dt}{d\rho} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{dt}{d\rho} \right)^{-1}$$

Bahnkurve: $p = p(\varphi)$

(ohne Zeitabhängigkeit anzugeben)

$$\frac{dt}{dp} = \left(\frac{dp}{dt} \right)^{-1} \quad \text{ZP8}$$

$$= \varphi = \varphi(t(p))$$

Analog zu (L49.1):

$$\frac{d\varphi}{dp} = \frac{d\varphi}{dt} \left(\frac{dt}{dp} \right) = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{p}} = \left(\frac{l}{\mu p^2} \right) \frac{(4.2)}{(7.2)} = \frac{1}{\pm \left[\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(p)) \right]^{1/2}} \quad (1)$$

Separation d. Variablen:

Integration:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{p_0}^{\varphi} dp' = \int_{p_0}^{\varphi} \frac{dp' (l/\mu p'^2)}{\pm \left[\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(p')) \right]^{1/2}} \quad (2)$$

= Funktion v. p

$$\varphi = \varphi(p) \text{ bekannt!} \quad (3)$$

$$\text{Diese Relation invertieren} \Rightarrow p = p(\varphi) \text{ bekannt.} \quad (4)$$

Qualitative Diskussion der Bewegung (WICHTIG!)

ZP9

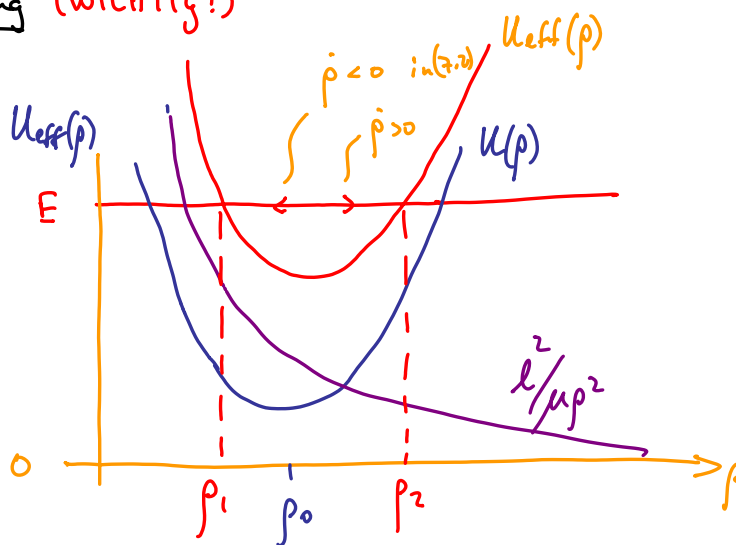
Typischer Fall 1:

z.B. für

$$U(p) = \alpha (p - p_0)^2$$

Harmonische Osz. mit
Gleichgewichtsabstand p_0

(z.B. Vibs. eines
2-atomigen Moleküls)



$$\left. \begin{array}{l} \text{für } p \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0 \end{array} \right\} U_{\text{eff}}(p) \rightarrow \infty$$

{ nur "gebundene"
Bewegung
möglich} \quad (1)

$$p_1, p_2 \text{ Umkehrpunkte bei } U_{\text{eff}}(p_1) = E = U_{\text{eff}}(p_2) \quad (2)$$

Typischer Fall 2:

z.B. für

$$U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho}$$

Gravitations- oder
Coulomb-Potential

2 Arten von Bewegung
sind möglich:

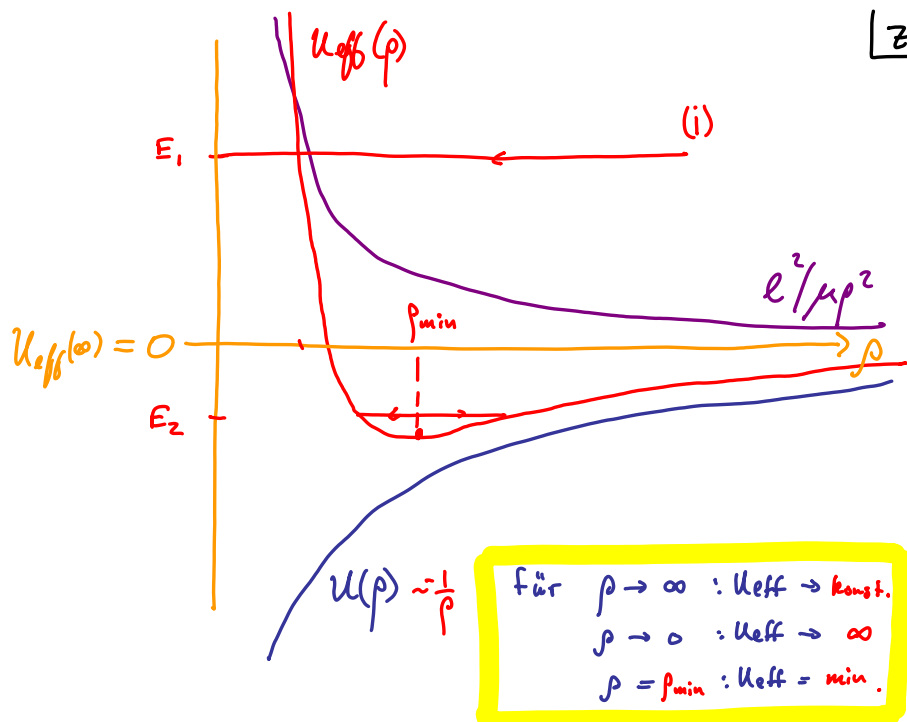
(i)

$$E_1 > U_{\text{eff}}(\infty) : \quad \leftarrow \text{hier } = 0 \text{ gewählt}$$

(ii)

$$E_2 < U_{\text{eff}}(\infty) :$$

ungebundene Bewegung
"Streuung durch
Zentrifugalbarriere"
gebundene Bewegung



ZP10

Typischer Fall 3:

z.B. für

$$U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho^3}$$

3 Arten v. Bewegung
sind möglich:

(i)

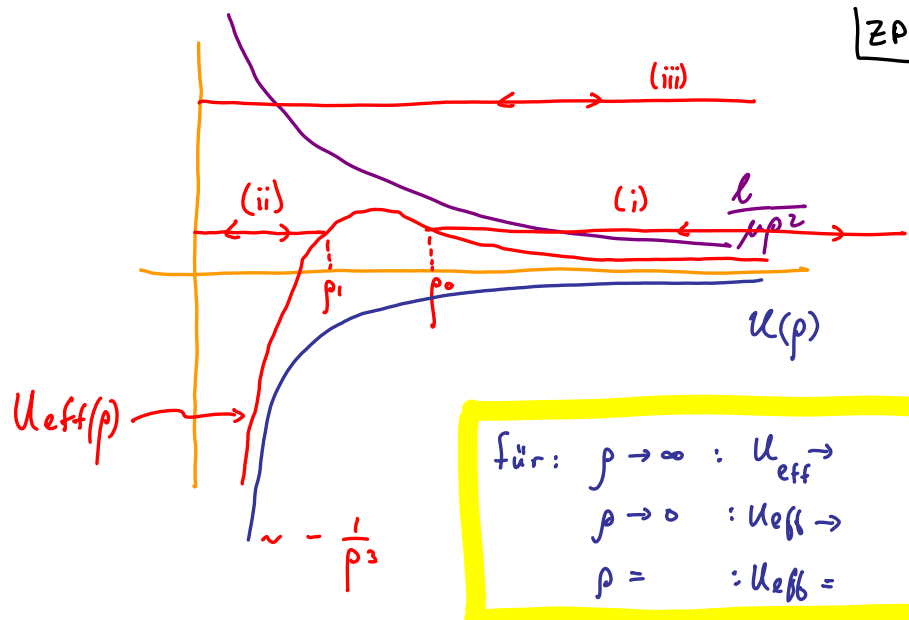
(ii)

(iii)

Streuung: $\rho > \rho_0$ (immer) Umkehrpunkt

Gebundene Bewegung: $0 \leq \rho \leq \rho_1$

Fall ins Zentrum (läuft durch's Zentrum hindurch)



ZP11