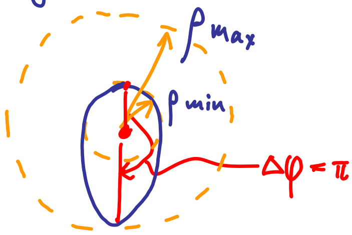
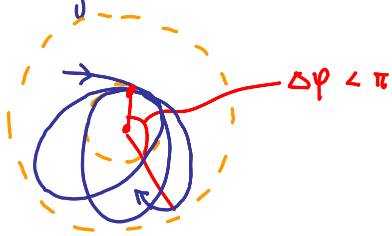
Gebundene Bwg: ist Bahn geschlossen oder nicht?

$\Delta\varphi$ sei Winkeländerung zwischen $\rho = \rho_{min}, \rho_{max}$

geschlossen:



ungeschlossen:



Bedingung für geschlossene Bahn:

Bahn schließt nach n Schleifen: $\quad n\, 2\Delta\varphi = 2\pi m \qquad (1)$

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 \overset{(8.2)}{=} \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{d\rho' \,(\ell/\mu\rho'^2)}{\left[\frac{2}{\mu}\left(E - U_{eff}(\rho')\right)\right]^{1/2}} \overset{??}{=} \frac{\pi m}{n} \qquad (2)$$

hängt v. U ab

Nachrechnen:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} \pi & \text{für } U = -\dfrac{\alpha}{\rho} \overset{(2)}{\Rightarrow} n = 1 \Rightarrow \text{Bahn ist Ellipse} \\ \pi/2 & \text{für } U = \alpha\rho^2 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow \text{Bahn schließt nach 2 Schleifen} \end{cases} \qquad (3)$$

Keplerproblem (Fließbach, Kap. 17)

Gravitations- oder Coulomb-Pot:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad \text{z.B.: } \alpha = \begin{cases} G m_1 m_2 & \text{Grav.Pot} \\ -q_1 q_2 & \text{Coulomb-Pot} \end{cases} \qquad (1)$$

Effektives Pot:

$$U_{eff}(\rho) \overset{(6.1)}{=} -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\ell^2}{2\mu\rho^2} \qquad (2)$$

Für diese Form ist Bahnkurve lösbar! $\quad \varphi = \varphi(\rho)$, $\rho = \rho(\varphi)$

(8.2):

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho' \,(\ell/\cancel{\mu}\rho'^2)}{\left\{\frac{2}{\cancel{\mu}}\left(\mu E - \underbrace{\left[-\mu\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\ell^2}{2\cancel{\mu}\rho^2}\right]}_{U_{eff}}\right)\right\}^{1/2}} \qquad (3)$$

$$\boxed{\varphi - \cancel{\varphi_0} \overset{\text{Bronstein}}{=} \arccos\left\{\frac{\ell/\rho - \mu\alpha/\ell}{\left[2\mu E + \mu^2\alpha^2/\ell^2\right]^{1/2}}\right\} + \underset{\text{durch Wahl v. } \varphi_0}{\overset{!}{\text{konst.} = 0}}} \qquad (4)$$

ZP 14

Definition:

Parameter: $p = \frac{\ell^2}{\mu\alpha}$, (1)

Exzentrizität: $\varepsilon = \left[1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}\right]^{1/2}$ (2)

$\frac{1}{\ell}\,\frac{\mu\alpha}{\ell}\cos\left[(13.4)\right]$:

$$\overbrace{\underbrace{\frac{\mu\alpha}{\ell^2}}_{=1/p}}\cos\varphi = \frac{\cancel{\ell}/\rho - \overbrace{\mu\alpha/\ell^2}^{(1)\ 1/p}}{\underbrace{\left[\frac{2\cancel{\mu}E\ell^2}{\mu^{\cancel{2}}\alpha^2} + \underbrace{\frac{\mu^2\alpha^2\ell^2}{\ell^2\mu^2\alpha^2}}_{=1}\right]^{1/2}}_{(2)\ \varepsilon}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{p}\cos\varphi = \left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{p}\right]\frac{1}{\varepsilon} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{p}\left[1 + \varepsilon\cos\varphi\right] \quad (5)$$

Bahnkurve:
(durch clevere Ausnutzung von E- und ℓ-Erhaltung)

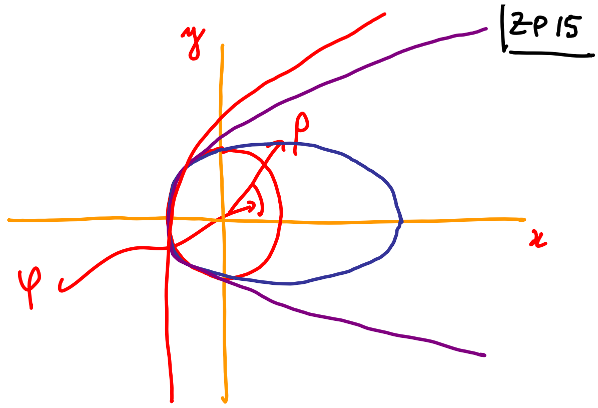
$$\boxed{\rho(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}} \quad (6)$$

ZP 15

(14.6) beschreibt Kegelschnitte:

$$\rho(\varphi) \overset{(14.6)}{=} \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

$$\varepsilon \overset{(14.2)}{=} \left[1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}\right]^{1/2}$$



(i) $E > 0 \overset{(14.2)}{\Rightarrow} \varepsilon > 1 \Rightarrow$ Hyperbel

(ii) $E = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1 \Rightarrow$ Parabel

$\Big\}$ $\varepsilon\cos\varphi \to -1$ möglich $\Rightarrow \rho \to \infty$ möglich (1)

(iii) $E < 0 \Rightarrow \varepsilon < 1 \Rightarrow$ Ellipse

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_{max} \overset{(14.6)}{=} \frac{p}{1-\varepsilon} \\ \rho_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon} \\ \Delta\varphi = \pi \end{array}\right. \quad (2)$$

= E bei minimum v. U_{eff}.

(iv) $E = -\frac{\mu\alpha^2}{2\ell} \Rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow$ Kreis

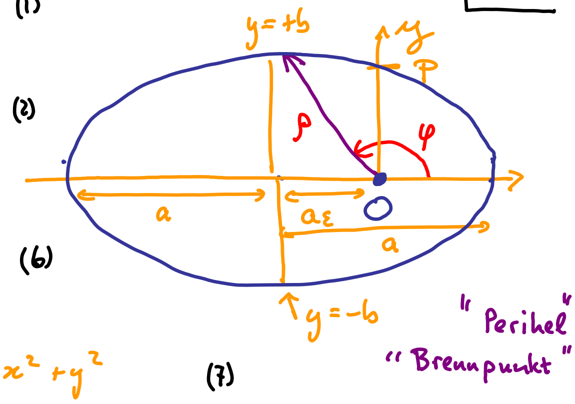
ρ unabhängig von φ (3)

Ellipse:

ZP 16

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\rho} \qquad (1)$$

$$\rho \overset{(14.6)}{=} \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi} \qquad (2)$$



Bahngleichung:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{p}{1-\varepsilon^2} \quad (3) \\ & \text{große} \\ & \text{kleine} \end{aligned}\ \Big\}\ \text{Halbachse}}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad (4)$$

$$= \sqrt{pa} \quad (5)$$

$$p = \rho + \varepsilon\overbrace{\rho\cos\varphi}^{x} \qquad (6)$$

$$(p-\varepsilon x)^2 = \rho^2 = x^2+y^2 \qquad (7)$$

$$p^2 = x^2(1-\varepsilon^2) + 2\varepsilon x p + y^2 \qquad (8)$$

$$(1-\varepsilon^2)\,[\ \ ]^2 = x^2 + \frac{2\varepsilon p x}{1-\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2 p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = (1-\varepsilon^2)\Big[x + \overbrace{\frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}}^{\varepsilon a}\Big]^2 - \overbrace{\frac{\varepsilon^2 p^2}{1-\varepsilon^2}}^{\varepsilon^2 b^2} + y^2 \qquad (9)$$

$$(9) \times \frac{(1-\varepsilon^2)}{p^2} = \frac{1}{b^2}: \quad \underbrace{\frac{(p^2/b^2 + \varepsilon^2 b^2)}{b^2}}_{(p^2/b^2+\varepsilon^2)\,=\,1} = \underbrace{\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{p^2}}_{1/a^2}\,[x+\varepsilon a]^2 + \frac{y^2}{b^2} \qquad (10)$$

ZP 17

(16.10) = Ellipse:

$$\boxed{\frac{(x+\varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (1)$$

Check Skizze:

$x=0$: $$y^2 = (1-\varepsilon^2)b^2 \overset{(16.5)}{=} p^2 \ ✓ \ \Rightarrow\ y = \pm p \qquad (2)$$

$x=-a\varepsilon$: $$y^2 = b^2 \ ✓ \qquad [b = \text{kleine Halbachse}] \qquad (3)$$

$y=0$: $$x^2 + 2\varepsilon a x + a^2(\varepsilon^2-1) = 0 \qquad (4)$$

$$x = -\varepsilon a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4\cancel{\varepsilon^2 a^2} - 4a^2(\cancel{\varepsilon^2}-1)} \qquad (5)$$

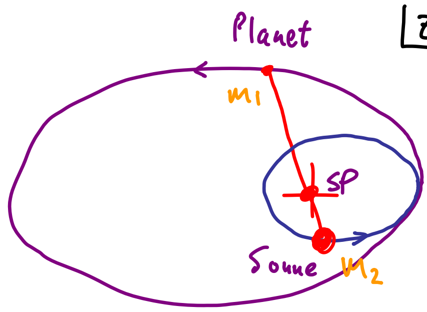
$$= -\varepsilon a \pm a = a\begin{Bmatrix} 1-\varepsilon \\ -1-\varepsilon \end{Bmatrix} \ ✓ \qquad (6)$$

ZP 18

Keplerschen Gesetze:

1. Planetenbahnen sind Ellipsenbahnen mit Sonne in einem Brennpunkt.
(stimmt nicht ganz!) aber fast!

$m_1 << m_2$



Herleitung:

$$\vec{r}_{Sonne} := \vec{r}_2 \overset{(4.5)}{=} \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \overset{SPS}{=} -\frac{m_p}{M}\vec{r} \simeq 0 \qquad (1)$$

$\frac{m_1}{M}$: ≃ klein; SPS: im SP-System; $\frac{m_p}{M} \lesssim 10^{-3}$, sogar für Jupiter.

$$\vec{r}_{Planet} := \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \overset{SPS}{=} \frac{m_S}{M}\vec{r} \simeq \vec{r} \qquad (2)$$

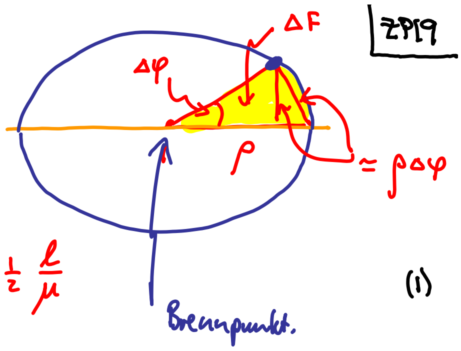
$\frac{m_2}{M} \simeq 1$; $\frac{m_S}{M} > 0.999$

$\Rightarrow$ $\vec{r}_{Sonne}$, $\vec{r}_{Planet}$ beschreiben gegenläufige Ellipsen;

Schwerpunkt liegt in einem Brennpunkt.

ZP19

2. Die vom Fahrstrahl pro Zeit überstrichene Fläche dF ist konstant



Herleitung:

Fläche des Dreiecks

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} \simeq \frac{1}{2}\rho \cdot \rho\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} \overset{(4.2)}{=} \frac{1}{2}\frac{\ell}{\mu} \qquad (1)$$

3. Quadrat der Umlaufzeit ist proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse.

Herleitung:
Fläche der Ellipse:

$$\pi ab = F = \underbrace{\int dF}_{\text{eine Umdrehung}} = \int_0^{T} \underbrace{\left(\frac{dF}{dt}\right)}_{\overset{(1)}{=}\frac{1}{2}\ell/\mu} dt = \frac{T\ell}{2\mu} \qquad (2)$$

T ← Periode

$$b^2 (\mu/\ell)^2 \overset{(16.5)}{=} a p \, \mu^2/\ell^2 = a\mu/\alpha$$

ap ↑ (16.5); (14.1) ↦ μ/α

$$T^2 = (2\pi a)^2 \cdot \underbrace{(b\mu/\ell)^2}_{(16.3,6)\ a\mu/\alpha} = 4\pi^2 \frac{\mu}{\alpha} a^3 \qquad (3)$$

$$\frac{\mu}{\alpha} = \frac{\cancel{m_1 m_2}}{m_1+m_2} \cdot \frac{1}{G\,\cancel{m_1 m_2}} = \frac{1}{G(m_p+m_S)} \simeq \frac{1}{G\,m_S} \qquad (4)$$

$=$ etwa gleich für alle Planeten.