VARIATIONSPRINZIPIEN

VIS - 06.06.07 L55

Ziel: Herleitung v. (LG2) aus einem Variationsprinzip (VP), das sog. "Hamiltonsche VP". (siehe S. 67)

Mathematisches Rüstzeug: "Variationsrechnung"

Variation ohne Nebenbedingungen (Fließbach, Kap.12)

Allgemeine Problemstellung

$F(y, y', x)$ sei eine gegebene Funktion v. y, y', x

$y = y(x)$ sei eine Funktion v. x, mit

$y' = y'(x) = \frac{\partial y(x)}{\partial x}$

Ein "Funktional" $J[y]$ [angedeutet durch eckige Klammern] bildet Funktion $y(x)$ auf Zahl ab.

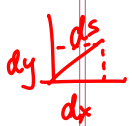
Welche Funktion $y(x)$ macht das Funktional

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; F(y(x), y'(x), x) \tag{1}$$

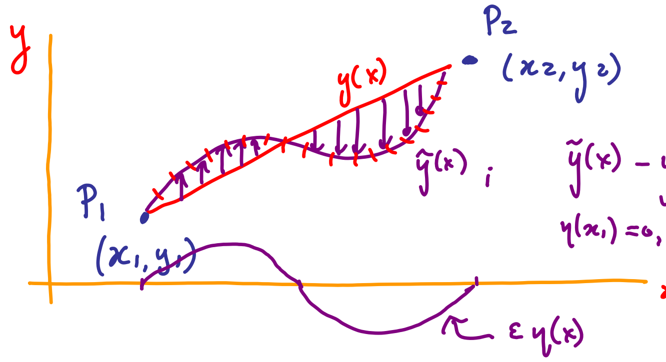
extremal, unter Randbedingungen

$$y(x_1) = y_1 \quad ? \tag{2}$$
$$y(x_2) = y_2$$

Konkretes Beispiel (Teil 1): L56



$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$



$\tilde{y}(x)$; $\quad \tilde{y}(x) - y(x) = \varepsilon\,\eta(x)$

$\eta(x_1) = 0, \; \eta(x_2) = 0 \quad (1)$

Frage:
Welche Funktion $y(x)$ minimiert die Bogenlänge zwischen P_1 und P_2?

"Geratene" Antwort: $\quad y(x) = ax + b = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1) + y_1$

Variationsrechnung ist ein systematisches Verfahren, solche Fragen zu beantworten!

Bestimmung des "Abstands-Funktionals":

$$J = J[y] \text{ "=" } \int_{P_1}^{P_2} ds \text{ "=" } \int_1^2 \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \boxed{\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + (y')^2}} \tag{3}$$

Ende v. Beispiel (Teil 1)

Strategie zur Findung der Extremalfunkt: "Variationsprinzip"

Gesuchte Fkt. sei $y(x)$

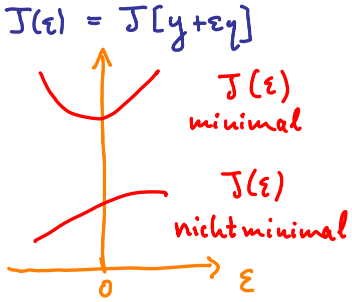
Vergleichsfkt. sei $y(x) + \overbrace{\varepsilon\, \eta(x)}^{\delta y(x)}$ (1)

infinitesimal (ε) beliebig (η)

mit Randbedingung: $\eta(x_1) = \eta(x_2) \overset{!}{=} 0$ (2)

weil $y(x_1)$, $y(x_2)$ = fest vorgegeben

Extremalbedingung: $J(\varepsilon) = J[y + \varepsilon\eta]$ sei extremal bei $\varepsilon = 0$ (3)



Mathematisch formuliert:

$$\boxed{\left.\frac{d\, J[y+\varepsilon\eta]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0} \quad (4)$$

Konsequenzen v. (57.4)

$$J[y+\varepsilon\eta] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y+\varepsilon\eta,\, y'+\varepsilon\eta',\, x) \quad (1)$$

$\eta' = \frac{\partial\eta}{\partial x}$

("normale Taylor-Entwicklung in 2 Var.)

Taylor-Entwicklung in ε um $\varepsilon = 0$:

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ F(y, y', x) + \underbrace{\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y}}_{\equiv F_y} \varepsilon\eta(x) + \underbrace{\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y'}}_{\equiv F_{y'}} \varepsilon\eta'(x) \right\} + O(\varepsilon^2) \quad (2)$$

$$F = F(\overset{y(x)}{y_0} + \overset{\varepsilon\eta(x)}{\Delta y}) = F(y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\Delta y + \dots$$

(57.4) $\Rightarrow$

$$0 = \left.\frac{d\, J[y+\varepsilon\eta]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ F_y\, \eta(x) + \underbrace{F_{y'}}_{f}\, \underbrace{\eta'(x)}_{g'} \right\} + \cancel{O(\varepsilon)} \quad (3)$$

part. Int.

Partielle Integration von $F_{y'}\eta'(x)$-Term:

$$\int_1^2 fg' = [fg]_1^2 - \int_1^2 f'g$$

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\left\{ F_y - \underbrace{\frac{d}{dx} F_{y'}}_{f'} \right\} \eta(x) \right] + \underbrace{\underbrace{F_{y'}}_{f}\, \underbrace{\eta(x)}_{g} \Big|_{x_1}^{x_2}}_{=0 \text{ (57.2)}} \quad (4)$$

$$0 = \int dx\, G(x)\, \eta(x) \quad \forall\, \eta(x) \Rightarrow G(x) = 0$$

(4) muss für beliebige $\eta(x)$ gelten: $\Rightarrow$

$$\boxed{F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0} \quad (5)$$

Mathematischer Einschub:

$$J[y+\varepsilon\eta] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y+\varepsilon\eta\,,\, y'+\varepsilon\eta'\,,\, x) \qquad (1)$$

$\frac{\partial \eta}{\partial x}$

?

↓ "normale Taylor-Entwicklung in 2 Var.".

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ F(y, y', x) + \underbrace{\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y}} \varepsilon\eta(x) + \frac{\partial F(y,y',x)}{} \varepsilon\eta'(x) \right\}$$

Zwischenrechnung: $F(u, w, x)$ sei Funktion v. drei Variablen

Betrachte: $F(u+\Delta u, w+\Delta w, x)$,

Taylor-Entw. in erstem und zweiten Argument, um u (in Potenzen v. Δu) und um w (in Potenzen v. Δw)

$$F(u, u, x) + \frac{\partial F}{\partial u}(u,w,x)\Big|_{\Delta u} \Delta u + \frac{\partial F}{\partial w}(u, w, x)\,\Delta w + O(\Delta u^2, \Delta w^2, \Delta u\,\Delta w)$$

Taylor-Entwicklung allg.:

$$F(u,w) = F(0,0) + \left(\frac{\partial F(u,w)}{\partial u}\Big|_{\substack{u=0\\w=0}} \right) \Delta u + \left(\frac{\partial F(u,w)}{\partial w}\Big|_{\substack{u=0\\w=0}} \right) \Delta w$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(u,w)}{\partial^2 u}\Big|_{\substack{u=0\\w=0}} (\Delta u)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(u,w)}{\partial^2 w}\Big|_{\substack{u=0\\w=0}} (\Delta w)^2$$

$$+ \frac{\partial^2 F(u,w)}{\partial u\, \partial w}\Big|_{\substack{u=0\\w=0}} \Delta u\,\Delta w + \ldots$$

Plausibilitätsargument:

Potenzreihenansatz:

Ansatz:

$$F(u,\omega) = F_{00} + F_{10}\,u + F_{01}\,\omega + F_{20}\,u^2 + F_{02}\,\omega^2 + F_{11}\,u\,\omega + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n'=0}^{\infty} F_{nn'}\,u^n\,\omega^{n'}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{\substack{u=0\\ \omega=0}} = F_{10}\;, \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial \omega}\right|_{\substack{u=0\\ \omega=0}} = F_{01}$$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial \omega}\right|_{\substack{u=0\\ \omega=0}} = F_{11}$$

Ende Mathematischer Einschub.

Mathematischer Einschub: Partielle Integration

Betrachte:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx\; f(x)\, g'(x)$$

kann wie folgt umgeformt werden

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{d}{dx}\left[f(x)\,g(x) \right] - f'(x)\,g(x) \right\}$$

$$= \Big[f(x)\,g(x) \Big]_{x_1}^{x_2} - \int dx\; f'(x)\,g(x)$$

Dies ist nützlich, falls $f'(x)\,g(x)$ leichter zu integrieren ist als $f(x)\,g'(x)$.

Beispiel:

$f(x) = x$

$g'(x) = e^{-x}$

$g(x) = -e^{-x}$

$f'(x) = 1$

$$I = \int_0^{\infty} dx\; \underbrace{x}_{f(x)}\,\underbrace{e^{-x}}_{g'(x)} = \int_0^{\infty} dx \left\{ \frac{d}{dx}\Big[\underbrace{x}_{f(x)}\,\underbrace{(-e^{-x})}_{g(x)} \Big] - \underbrace{1}_{f'(x)}\cdot\underbrace{(-e^{-x})}_{g(x)} \right\}$$

$$= \underbrace{\Big[x\,\cancel{(-e^{-x})} \Big]_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} dx\,(+e^{-x}) = \Big[-e^{-x} \Big]_0^{\infty} = 1$$

(58.5) explizit:

"Euler-Lagrange-Gl. (ELG) der Variationsrechnung":

[Gl. für die gesuchte Funktion $y(x)$]

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

umschreiben mittels Def. von (58.2) für F_y, $F_{y'}$.

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y}} \qquad (1)$$

Beispiel: (Teil 2)

minimale Bogenlänge?

$$F(y,y',x) \overset{(56.3)}{=} \sqrt{1 + y'^2} \qquad (2)$$

ELG: (1):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0 \qquad (3)$$

"Integration":

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \text{konst.} = x\text{-unabhängig} \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = ax + b = \text{Gerade} \checkmark$$

☺

Zusammenfassung der Herleitung in Kurznotation:

$$\delta J = J[y + \delta y] - J[y] \qquad (1)$$

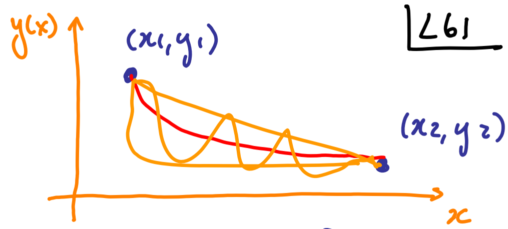
$$\delta y \to 0: \overset{(58.3)}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ F_y \, \delta y + F_{y'} \, \delta y' \right\} \qquad (2)$$

$$\overset{(58.4)}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y + \underset{\text{Randterm}}{0} \qquad (3)$$

↑ beliebig

$$\delta J = 0 \iff \frac{d}{dx} F_{y'} \overset{(58.5)}{=} F_y \qquad (4)$$

Beispiel: Schnellster Fallweg?
"Problem der Brachistochrone", (Bernoulli)
["brachistos" = kürzeste, "chronos" = Zeit]



Für welche Form der "Rutschbahn" $y(x)$ ist Rutschzeit minimal?

Für Animation des rollenden Teilchens, siehe: http://home.ural.ru/~iagsoft/BrachJ2.html

Historie: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Brachistochrone.html
Excerpt from an article by: J J O'Connor and E F Robertson

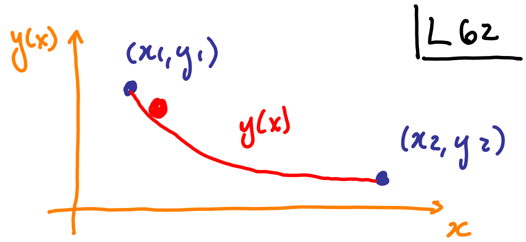
The brachistochrone problem was posed by Johann Bernoulli in Acta Eruditorum in June 1696:
"I, Johann Bernoulli, address the most brilliant mathematicians in the world. Nothing is more attractive to intelligent people than an honest, challenging problem, whose possible solution will bestow fame and remain as a lasting monument. Following the example set by Pascal, Fermat, etc., I hope to gain the gratitude of the whole scientific community by placing before the finest mathematicians of our time a problem which will test their methods and the strength of their intellect. If someone communicates to me the solution of the proposed problem, I shall publicly declare him worthy of praise."

The problem he posed was the following:-
"Given two points A and B in a vertical plane, what is the curve traced out by a point acted on only by gravity, which starts at A and reaches B in the shortest time."

Now Johann Bernoulli and Leibniz deliberately tempted Newton with this problem. It is not surprising, given the dispute over the calculus, that Johann Bernoulli had included these words in his challenge:-
"...there are fewer who are likely to solve our excellent problems, aye, fewer even among the very mathematicians who boast that [they]... have wonderfully extended its bounds by means of the golden theorems which (they thought) were known to no one, but which in fact had long previously been published by others."

According to Newton's biographer Conduitt, he solved the problem in an evening after returning home from the Royal Mint. Newton:-
"... in the midst of the hurry of the great recoinage, did not come home till four (in the afternoon) from the Tower very much tired, but did not sleep till he had solved it, which was by four in the morning."

Für welche Form der "Rutschbahn" $y(x)$ ist Rutschzeit minimal?



Bestimmung des "Rutschdauer-" Funktionals:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$t_{21} = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v} \qquad (1)$$

Bogenlänge

momentane Geschw.

$$\text{wobei:} \quad ds \overset{(56.2)}{=} dx\sqrt{1+y'^2} \qquad (2)$$

Energie-Erhaltung: $\frac{1}{2}mv^2 + mg(y-y_1) = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2g(y_1-y)}$ (3)

(3), (2) in (1):

$$t_{21} = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_1-y(x))}} \equiv F(y,y',\cancel{x}) \qquad (4)$$

← (2)

← (3)

ELG: $$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad (1)$$

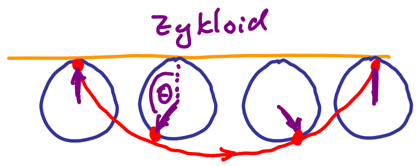
konkret für (62.4), (2)

$$F(y,y',x) = \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_1-y(x))}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{[2g(y_1-y)]^{1/2}}\,\frac{+\tfrac{1}{2}\cdot 2y'}{[1+y'^2]^{1/2}}\right] = [1+y'^2]^{1/2}\,\frac{(-\tfrac{1}{2})(-2g)}{[2g(y_1-y))]^{3/2}}$$

Diese Differentialgleichung für $y(x)$ bestimmt die Form der gesuchten Kurve y(x).
Ihre Lösung sei vollständigheitshalber (ohne Herleitung) erwähnt:

Integration liefert: $$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]y = k^2 \qquad k = k(g;\, x_1, y_1, x_2, y_2)$$



Parametrische Lösung: (= Zycloid)

$$x = \tfrac{1}{2}k^2(\theta - \sin\theta)$$
$$y = -\tfrac{1}{2}k^2(1-\cos\theta)$$

Für eine Herleitung, siehe:
http://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html

Für Animation einer Zykloide, siehe:
http://www.ies.co.jp/math/java/calc/cycloid/cycloid.html

Verallgemeinerung:

Funktional v. mehreren Fkt. $y_1(x), \dots, y_N(x)$

$$J = J[y_1,\dots,y_N] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y_1,\dots,y_N;\, y_1',\dots,y_N';\, x) \qquad (1)$$

Randbedingung: $y_i(x_1) = y_{i1}$, $y_i(x_2) = y_{i2}$ $\quad i=1,\dots,N$ (2)

Gesucht: $y_i(x)$, für die $J[y_1,\dots,y_N]$ extremal ist.

Vergleichsfkt: $y_i(x) + \varepsilon_i \eta_i(x)$ (unabhängige Variationsparameter)

Extremalbedingung: $J[y_i + \varepsilon_i\eta_i]$ sei minimal bei $\varepsilon_i = 0$

$$\left.\frac{dJ[y_i+\varepsilon_i\eta_i]}{d\varepsilon_i}\right|_{\varepsilon_i=0} = 0 \qquad \forall\, i=1,\dots,N \qquad (3)$$

(denn ε_i sind unabhängig)

N mal dasselbe wie vorhin: $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial F(y_1,\dots,y_N;\, y_1',\dots,y_N', x)}{\partial y_i'} = \frac{\partial F(\,)}{\partial y_i} \quad \forall\, i=1,\dots,N} \qquad (4)$$

L65

Weitere Verallgemeinerung: (zur Kenntnisnahme)

N Fkt. $y_i(x_\nu) := y_i(x_1, \dots, x_R)$, $\forall\, i = 1, \dots, N$

jeweils als Fkt. v. R Variablen, x_ν, $\nu = 1, \dots, R$ (1)

Funktional:

$$J[y_i] := J[y_1, \dots, y_N] = \int_B dx_1 \dots \int dx_R \; F\Big[\underset{i=1,\dots,N}{y_i}, \underset{\nu=1,\dots,R}{\frac{\partial y_i}{\partial x_\nu}}, x_\nu\Big] \qquad (2)$$

$\frac{\partial y_i}{\partial x_\nu} \equiv \partial_\nu y_i$, $\quad B \subset \mathbb{R}^R$

Randbedingungen: Alle $y_i(x_\nu)$ seien auf Rand von B fest vorgegeben

Gesucht: Funktionen $y_i(x_\nu)$, für die $J[y_i]$ extremal ist

Vergleichsfunktion: $y_i(x_1, \dots x_R) + \varepsilon_i \eta_i(x_1, \dots x_R)$ (3)

η_i: unabhängige Variationsfunktionen jeweils abhängig v. R Parametern x_ν

mit Ableitungen: $\underline{\partial_\nu} y_i + \varepsilon_i \underline{\partial_\nu} \eta_i$

L66

Extremalbedingung: [wie (61.4)]

$$0 = \frac{dJ[y_i + \varepsilon_i \eta_i]}{d\varepsilon_i}\bigg|_{\varepsilon_i = 0}$$

$\frac{\partial F}{\partial y'} \eta'$ ↓ verallg.

ε_i sind alle unabhängig:

$$0 = \int_B dx_1 \dots dx_N \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_i} \eta_i + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{R} \frac{\partial F}{\partial(\partial_\nu y_i)} \partial_\nu \eta_i}_{\text{partielle Integration}} \right\}$$

$\forall\, i = 1, \dots, N$

η_i beliebig: $\Rightarrow$

$$0 = \int dx_1 \dots dx_N \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} \left\{ - \sum_{\nu=1}^{R} \left(\frac{d}{dx_\nu} \frac{\partial F}{\partial(\partial_\nu y_i)} \right) \right\} \right] \eta_i + \underbrace{\cancel{\text{Randterme}}}_{=0}$$

N-EL-Gleichungen:

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{R} \frac{d}{dx_\nu} \frac{\partial F}{\partial(\partial_\nu y_i)} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \forall\, i = 1, \dots, N} \qquad (63.2)$$

Weitere mögliche Verallg.:

(i) Höhere Ableitungen, z.B. $F(y, y', y'', y''')$ ..

(ii) keine Randbedingungen vorgeben ...

(iii) Variation mit Nebenbedingungen ...

Hamiltonsches Prinzip der kleinsten (extremalen) Wirkung

(Fließbach, 14)

Def: "Wirkung" $S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(q, \dot{q}, t)$ (1)

$(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ geschw.
$(q_1, \dots, q_f)$ Koordinaten

Das Funktional $S[q]$ wird die "Wirkung" der Bahnkurve $q(t)$ genannt.

"action" : Einheiten: Energie × Sekunde

Hamiltonsche Prinzip (HP): Dynamische Evolution $q(t)$ des Systems zwischen $q(t_1) = q_1$ und $q(t_2) = q_2$ erfolgt so, dass die Wirkung extremal wird, $\delta S[q] = 0$ (2)

unter Variation der Bahnkurve $q(t)$,

mit Randbedingung $\delta q(t_1) = 0, \; \delta q(t_2) = 0$ (3)

Beweis:

Identifiziere: $F \leftrightarrow L, \quad y_i \leftrightarrow q_i, \quad x \leftrightarrow t$ (1)

$y_i' \leftrightarrow \dot{q}_i$

ELG (bl. 4)

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y_i}:$$

$$\boxed{\delta S[q] = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \forall\, i = 1, \dots, f}$$ (2)

ELG für Hamiltonsches Prinzip liefern LG2 !!

f Diff-Gl. 2. Ordnung $\Rightarrow$ $2f$ Integrationskonst.

entweder: $q_1, \dots, q_f$ und $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$, bei $t = t_1$

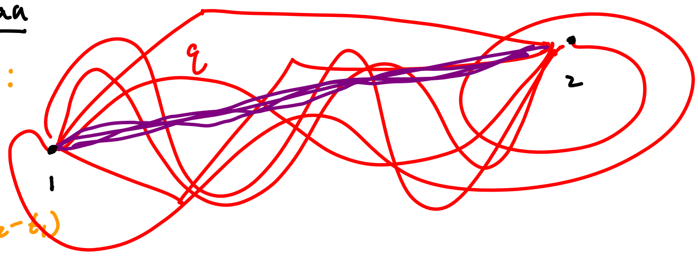
oder: $q_1, \dots, q_f$ bei $t = t_1$ und $t = t_2$

Quantenmechanik à la Feynman

Freies Teilchen: klassischer Weg:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) \qquad x = vt,\quad \dot{x} = v$$

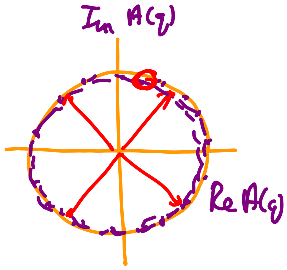
$$= \frac{1}{2} m v^2 \int_{t_1}^{t_2} dt\, 1 = \frac{1}{2} m v^2 (t_2 - t_1)$$



Wahrscheinlichkeit, von P_1 nach P_2 in Zeit $t = t_2 - t_1$ zu gelangen, ist:

$$W_{1\to 2} \quad \Bigg| \sum_{\substack{\text{alle Wege} \\ \text{zwischen } 1\to 2}} \underbrace{e^{\,i S[q]/\hbar}}_{A(q)} \Bigg|^2 \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Für die meisten Wege mitteln sich die Phasen weg.



Ausser für die Wege für die $\delta S = 0$.

Bündel um den klassischen Weg

$\Longrightarrow$ Hamiltonsche Prinzip !!