

Zusammenfassung: Variationsprinzipien

VL6 - 11.06.07

70a

Allgemeine Problemstellung

Welche Funktion $y(x)$ macht das Funktional

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x) \quad (1)$$

Antwort:

extremal, unter Randbedingungen $y(x_1) = y_1$
 $y(x_2) = y_2$ (2)

"Euler-Lagrange-Gl. (ELG) der Variationsrechnung"

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} \quad (3)$$

Def: "Wirkung"

Prinzip der kleinsten Wirkung

$$S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (4)$$

Hamiltonsches Prinzip: Bewegung verläuft so, dass $\delta S[q] = 0$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} :$$

$$\delta S[q] = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad \forall i=1, \dots, f \quad (5)$$

Variation mit Nebenbedingungen

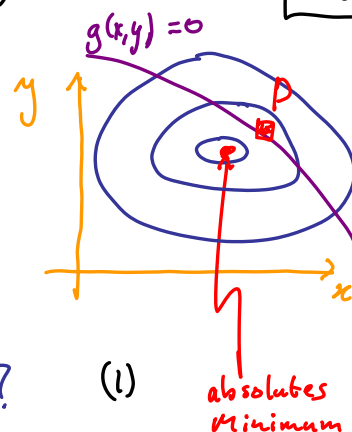
(Fließbach, Kap. 13)

70b

Lagrange-Multiplikatoren

Fragestellung:

Welcher Punkt $P = (x_P, y_P)$ minimiert $f(x, y)$, unter der Nebenbedingung (NB) $g(x, y) = 0$?



Ohne NB wäre
Antwort:

$\begin{cases} 2 \text{ Gl. für } \checkmark \\ 2 \text{ Unbekannte} \end{cases} \quad (2)$

Aber:

NB verknüpft $x, y \Rightarrow$ unabhängige Variation v.
 x, y nicht erlaubt

Lösungsweg 1:

Eliminiere y :

$^{-1}$
(70b.i) liefert:

70c
(1)

(1) in f :

(2)

[berücksichtigt NB!]

Minimiere $\tilde{f}(x)$:

$$0 = \frac{d}{dx} \tilde{f} =$$

(3)

Finde (x_p, y_p) :

(3) gelöst liefert , eingesetzt in (1) liefert

Beispiel:

Finde Minimum von $f(x, y) = x^2 + y^2$ (1)

mit NB

$$g(x, y) = 2x - y - 1 = 0 \quad (2)$$

Lösungsweg 1:

finde $y = y_g(x)$:

Eingesetzt in (1):

$$\tilde{f} = f(x, y_g(x)) =$$

Minimiere $\tilde{f}$ nach x :

Lösungsweg 2:

Ignoriere zunächst die NB und deren Verknüpfung von x, y , und minimiere erweiterte Fkt,

70d

$$f^*(x, y, \lambda) := \quad (1)$$

[Lagrange-Multiplikator]

3 unabhängige
Variationsparameter

nach x, y, λ . Die Variation nach λ generiert dann die NB per Konstruktion (aber erst "hinterher").

Extremalbedingungen: $0 = \partial_x f^* = \quad (2)$

$$0 = \partial_y f^* = \quad (3)$$

NB wird automatisch
generiert!

$$0 = \partial_\lambda f^* = \quad (5) \quad (4)$$

(6) in (2):

$$0 = \quad (6)$$

Konsistenzcheck:

(70c.3) $\stackrel{?}{\Leftrightarrow}$ (70d.5), (70d.6)

Schreibe NB als :

70e

(1)

{via (70c.1)}

$$\Rightarrow \quad \partial_y g = \quad (1) \quad , \quad \partial_x g = \quad (2)$$

(2) in (70d.6)

$$0 = \quad (3)$$

Beispiel:

Lösungsweg z:

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = 2x - y - 1 = 0 \quad \boxed{\text{70f}}$$

$$f^*(x, y, \lambda) =$$

$$0 = \frac{\partial f^*}{\partial x} =$$

$$0 = \frac{\partial f^*}{\partial y} =$$

$$0 = \frac{\partial f^*}{\partial \lambda}$$

Eliminiere λ :

Eliminiere y aus
(4), (5):

(4):

(5):

70g

Konsistenzcheck:

$$g(x, y) = y - y_g(x) =$$

$$\partial_y g = \quad \quad \partial_x g =$$

Eingesetzt in (5)

$$0 = \partial_x f - \partial_y f \frac{\partial y_g}{\partial x}$$
$$=$$

Verallgemeinerung:

Funktion mehrerer Variablen

L71a

(1)

Fragestellung:

$f(x_1, \dots, x_N)$ sei minimal, mit $g_\alpha(x_1, \dots, x_N) = 0$

NB an alle x_i
für jedes α } $\alpha = 1, \dots, R$

Lösungsweg:

Minimiere

nach $x_1, \dots, x_N, \lambda_1, \dots, \lambda_R$ (2)

"Lagrange-Multiplikator (LM)"

Extremalbedingungen:

$$0 = \partial_{x_i} f^* =$$

(3)

$$0 = \partial_{\lambda_\alpha} f^* =$$

(4)

Kernidee v. LM:

Gebe NB zunächst auf während Minimierung, aber wähle Funktion f^* so, dass $\partial_{\lambda_\alpha} f^* = 0$ die NB generiert.

Verallgemeinerung:

Funktional mit "isoperimetrischer" NB

L71b

(1)

Fragestellung:

$$J[y_i] =$$

sei extremal,
legt einen Parameter fest

$$\text{mit NB } K_\alpha[y_i] =$$

(2)

$\alpha = 1, \dots, R$

Lösungsweg: finde

(3)

Extrema von:

$$J^* = J - \sum_\alpha \lambda_\alpha K_\alpha$$

$$J^*[y_i, \lambda_\alpha] =$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial \lambda_\alpha} = 0$$

(4)

sind
gemeinsam
zu lösen

Euler-Lagrange-Gl (6.4)

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}$$

(5)

Verallgemeinerung:

Funktional: Extrema mit Holonomem NB

L72

geschw. kommt nicht vor

Fragestellung:

$$J[y_i] =$$

sei extremal, (1)

legt eine Funktion fest

(2)

mit holonomem NB:

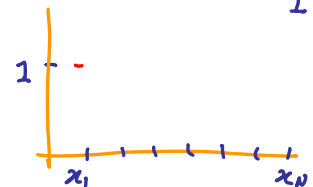
NB an alle y_i
für jedes x

schärfere NB
als (71.2)

Zurückführung auf
isoperimetrische NB:
Schreibe (2) als

$$K_\alpha[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} g(y_i, x)$$

(3) Aufteilung von $[x_1, x_2]$
in I Intervalle der
Länge $d = \frac{x_2 - x_1}{I}$



Verallgemeinertes
Funktional:

$$J^* =$$

L73

(1)

Extremalbedingungen:

$$0 = \frac{\partial J^*}{\partial \lambda_\alpha} =$$

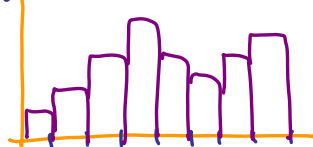
(2)

[reproduziert]

Im Limes $I \rightarrow \infty$

$$J^* = \int_{x_1}^{x_2} \left[F(y_i, y'_i, x) - g(y_i, x) \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} f_{\alpha}(x) \right]$$

$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} f_{\alpha}(x)$



$$= \int_{x_1}^{x_2} F^*(y_i, y'_i, x) \quad (4)$$

(3)

$$F^*(y_i, y'_i, x) =$$

(5)

Euler-Lagrange für F^* :

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y'_i} = \frac{\partial F^*}{\partial y_i}$$

(6)

Hamiltonprinzip für System mit holonomen NB liefert Lg 1

L74

Betrachte

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_n m_n \dot{x}_n^2 - U(x, t) \quad (1)$$

$\underbrace{\quad}_{\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n)}$

also: Koordinaten x_i

sind nicht unabhängig,

also keine guten

Verallg. Koordinaten

mit Zwangsbedingungen :

$$g_\beta(x, t) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Wirkung : } S[x] = \quad (3)$$

HP besagt:

Dynamische Evolution so, daß $\delta S = 0$, wobei $g_\beta = 0$

(4)

$\Rightarrow$

Variationsproblem mit holonomen NB !

L75

Erweiterte Lagrange-
Funktion :

$$\mathcal{L}^*(x, \dot{x}, t) = \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$$

(1)

E(7.3.6) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i} - \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial \dot{y}_i}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_n} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n}$$

:

(7.4x) eingesetzt:

..

(2)

Fazit:

$$\delta S^* = 0 \Leftrightarrow \text{Lg 1}$$

(3)

Bemerkungen zu HP

- Elegante, kompakte Formulierung der dyn. Evolution in einer einzigen Gl.
- Hilft jedoch nicht für praktische Lösungen: ELG muss sowieso gelöst werden
- $\mathcal{L}$ ist sehr einfach zu bestimmen
- $\sum_{\beta} \lambda_{\beta} \frac{\partial q_{\beta}}{\partial x_i}$ beschreibt Zwangskräfte

Evaluation: www.physik.uni-muenchen.de/evaluation/vorlesung.html