Zusammenfassung: Variationsprinzipien

V16 – 11.06.07

Allgemeine Problemstellung

Welche Funktion $y(x)$ macht das Funktional

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \, F(y(x), y'(x), x) \qquad (1)$$

extremal, unter Randbedingungen $\begin{array}{l} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{array}$ (2)

Antwort:

"Euler-Lagrange-Gl. (ELG) der Variationsrechnung":

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y}} \qquad (3)$$

Def: "Wirkung" $S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ (4)

Prinzip der kleinsten Wirkung

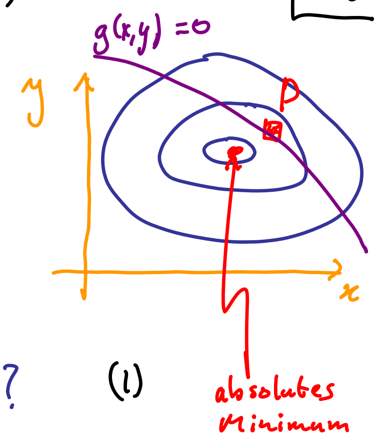
Hamiltonsches Prinzip: Bewegung verläuft so, dass $\delta S[q] = 0$

$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i}$:

$$\boxed{\delta S[q] = 0 \iff \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad \forall\, i = 1, \dots, f} \qquad (5)$$

Variation mit Nebenbedingungen

(Fließbach, Kap. 13)



Lagrange-Multiplikatoren

Fragestellung:

Welcher Punkt $P = (x_P, y_P)$ minimiert $f(x,y)$, unter der Nebenbedingung (NB) $g(x,y) = 0$? (1)

Ohne NB wäre Antwort:

$\partial_x f = 0, \quad \partial_y f = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{2 Gl. für} \\ \text{2 Unbekannte} \end{array} \right.$ ✓ (2)

Aber:

NB verknüpft x, y $\Rightarrow$ unabhängige Variation v. x, y nicht erlaubt

Lösungsweg 1:

Eliminiere y:

$(70b.1)^{-1}$ liefert: $y = y_g(x)$ (1)

(1) in f: $f = f(x, y_g(x)) =: \tilde{f}(x)$ (2)

[berücksichtigt NB!]

Minimiere $\tilde{f}(x)$:

Kettenregel.

$$0 = \frac{d}{dx}\tilde{f} = \partial_x f(x,y)\Big|_{y=y_g(x)} + \partial_y f(x,y)\Big|_{y=y_g(x)} \partial_x y_g(x) \quad (3)$$

Finde (x_p, y_p):

(3) gelöst liefert x_p, eingesetzt in (1) liefert $y_p = y_g(x_p)$.

Beispiel:

Finde Minimum von $f(x,y) = x^2 + y^2$ (1)

mit NB $g(x,y) = 2x - y - 1 = 0$ (2)

Lösungsweg 1:

finde $y = y_g(x)$: $y \overset{(2)}{=} 2x - 1 =: y_g(x)$

Eingesetzt in (1): $\tilde{f} = f(x, y_g(x)) = x^2 + (2x-1)^2 = 5x^2 - 4x + 1 =: \tilde{f}(x)$

Minimiere $\tilde{f}$ nach x:

$$0 = \frac{d\tilde{f}}{dx} = 2x + 2(2x-1)\cdot 2 = 10x - 4$$

$$= \partial_x f + \underbrace{\partial_y f\Big|_{y=y_g}}_{2(2x-1)} \cdot \underbrace{\partial_x y_g(x)}_{2} \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$= 10x - 4 \Rightarrow x_p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Lösungsweg 2:

Ignoriere zunächst die NB und deren Verknüpfung von x, y, und minimiere erweiterte Funktion,

$$f^*(x,y,\lambda) := f(x,y) - \lambda\, \underbrace{g(x,y)}_{\text{NB}} \qquad (1)$$

[Lagrange-Multiplikator]

3 unabhängige Variationsparameter: nach x, y, λ. Die Variation nach λ generiert dann die NB per Konstruktion (aber erst "hinterher").

Extremalbedingungen:

$$0 = \partial_x f^* = \partial_x f - \lambda\, \partial_x g \qquad (2)$$

Eliminiere λ:

$$0 = \partial_y f^* = \partial_y f - \lambda\, \partial_y g \qquad (3) \Longrightarrow \lambda = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \Big/ \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) \qquad (4)$$

NB wird automatisch generiert!

$$0 = \partial_\lambda f^* = -g \qquad (5) \Rightarrow \text{NB wird reproduziert.}$$

(6) in (2):

$$0 = \partial_x f - \partial_y f\, (\partial_x g)/(\partial_y g) \qquad (6)$$

Konsistenzcheck:

(70c.3) $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ (70d.5), (70d.6)

Schreibe NB als: $g(x,y) = y - y_g(x) = 0$ (1)

[via (70c.1)]

$$\Rightarrow \quad \partial_y g \overset{(1)}{=} 1 \quad , \quad \partial_x g \overset{(1)}{=} -\partial_x y_g(x) \qquad (2)$$

(2) in (70d.6)

$$0 = \left[\partial_x f - \partial_y f \, \frac{(-\partial_x y_g(x))}{1}\right]_{0 \overset{(70d.5)}{=} g \overset{(1)}{=} y - y_g(x)} \qquad (3)$$

$$= \partial_x f(x,y) + \partial_y f(x,y)\Big|_{y = y_g(x)} \cdot \partial_x y_g(x)$$

$$= (70c.3) \quad \text{Konsistent!}$$

70f

Beispiel:

Lösungsweg 2:

$$f(x,y) = x^2+y^2, \qquad g(x,y) = 2x - y - 1 = 0$$

$$f^*(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y)$$

$$= x^2+y^2 - \lambda(2x-y-1)$$

$$0 = \frac{\partial f^*}{\partial x} = 2x - \lambda 2 = \partial_x f - \lambda \partial_x g \qquad (1)$$

$$0 = \frac{\partial f^*}{\partial y} = 2y - \lambda(-1) = \partial_y f - \lambda \partial_y g \qquad (2)$$

$$\hookrightarrow \lambda = -2y = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \Big/ \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{2y}{-1} = -2y \qquad (4)$$

$$0 = \frac{\partial f^*}{\partial \lambda} = -g = -(2x-y-1) \qquad (3)$$

Eliminiere λ: (4) in (1): $\quad 2x - [-2y]2 = \partial_x f - \partial_y f\, (\partial_x g)/(\partial_y g)$

$$2x - 2y(2)/(-1) \quad \checkmark$$

70g

Eliminiere y aus (4), (5):

(4): $\quad y = 2x - 1$

(5): $\quad 0 = 2x + 4(2x-1) = 10x - 4$

Konsistenzcheck:

$$g(x,y) = y - y_g(x) = y - (2x-1)$$

$$\partial_y g \overset{\checkmark}{=} 1 \qquad \partial_x g = -2 \overset{\checkmark}{=} -\partial_x y_g(x)$$

Eingesetzt in (5)

$$0 = \partial_x f - \partial_y f \frac{\partial_x g}{\partial_y g} = \partial_x f + \partial_y f \frac{\partial_x y_g(x)}{\partial_y g}$$

$$= 2x - 2y\Big|_{y=2x-1} \cdot \left(\frac{-2}{1}\right) = 2x - 2(2x-1)(-2)$$

$$= 10x - 4 .$$

Verallgemeinerung: Funktion mehrerer Variablen

L71a

Fragestellung: $f(\underbrace{x_1,\dots,x_N}_{x})$ sei minimal, mit $g_\alpha(x_1,\dots,x_N)=0$ (1)

NB an alle x_i für jedes α $\quad \alpha=1,\dots,R$

Lösungsweg:

$$\boxed{\text{Minimiere } f^*(x) = f(x) - \sum_\alpha \lambda_\alpha g_\alpha^{(x)} \text{ nach } x_1,\dots,x_N,\lambda_1,\dots,R} \quad (2)$$

"Lagrange-Multiplikator (LM)"

Extremalbedingungen:

$$0 = \partial_{x_i} f^* = \partial_{x_i} f(x) - \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_{x_i} g_\alpha(x) \quad (3)$$

$$0 = \partial_{\lambda_\alpha} f^* = -g_\alpha(x) \quad (4)$$

Kernidee v. LM: Gebe NB zunächst auf während Minimierung, aber wähle Funktion f^* so, dass $\partial_{\lambda_\alpha} f^* = 0$ die NB generiert.

Verallgemeinerung: Funktional mit "isoperimetrischer" NB

L71b

$y(x) = (y_1(x),\dots,y_N(x))$

Fragestellung: $J[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y_i, y_i'; x)$ sei extremal, (1)

legt einen Parameter fest

mit NB $K_\alpha[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, G_\alpha(y_i, y_i'; x) = 0$ (2)

$\alpha = 1,\dots,R$

Lösungsweg: finde Extrema von: $J^* = J - \sum_\alpha \lambda_\alpha K_\alpha$

$$\boxed{J^*[y_i,\lambda_\alpha] = \int_{x_1}^{x_2} dx \overbrace{\left[F(y_i,y_i';x) - \sum_\alpha \lambda_\alpha G_\alpha(y_i,y_i',x)\right]}^{F^*}} \quad (3)$$

$\frac{\partial}{\partial\lambda_\alpha} \sum_{\alpha'} \lambda_{\alpha'} \int dx\, G_{\alpha'} = \int dx\, G_\alpha$, $\quad \frac{\partial \lambda_{\alpha'}}{\partial \lambda_\alpha} = \delta_{\alpha\alpha'}$

$$0 = -\frac{\partial J^*}{\partial \lambda_\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx\, G_\alpha(y_i, y_i'; x) \overset{(2)}{=} K_\alpha[y_i] \quad \forall\, \alpha = 1,\dots,R \quad (4)$$

sind gemeinsam zu lösen

Euler-Lagrange-Gl (61.4)
$\frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial y_i'} = \frac{\partial F^*}{\partial y_i}$:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial\left(F - \sum_\alpha \lambda_\alpha G_\alpha\right)}{\partial y_i'} = \frac{\partial\left(F - \sum_\alpha \lambda_\alpha G_\alpha\right)}{\partial y_i} \quad (5)$$

$i = 1,\dots,N$

Verallgemeinerung: Funktional: Extrema mit Holonomen NB

Gesdw. kommt nicht vor

Fragestellung:

$$\overbrace{J[y_i]}^{y_1(x_1),\ldots,y_N(x)} = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y_i, y_i', x) \quad \text{sei extremal,} \tag{1}$$

z.B.: $g(y_1, y_2, x)$
$= y_1(x) - y_2(x) - x = 0$
$\Rightarrow y_1(x) = y_2(x) + x$

legt eine Funktion fest

mit holonomer NB: $g(y_i, x) = 0$ (2)

NB an alle y_i für jedes x

schärfere NB als (71b.2)

Zurückführung auf isoperimetrische NB:

Schreibe (2) als

$$K_\alpha[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, g(y_i, x)\, f_\alpha(x) = 0 \tag{3}$$

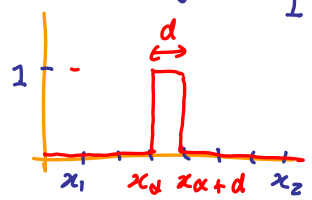
$$\Downarrow$$

$$\int_{x_\alpha}^{x_\alpha + d} dx\, g(y_i, x) = 0$$

Lim (3) = (2): $I \to \infty$

$g(y, x) = 0 \quad \forall x \quad \xLeftarrow[d \to 0]{\text{gelte } \forall \alpha \text{ im Limes } I \to \infty}$

Aufteilung von $[x_1, x_2]$ in I Intervalle der Länge $d = \frac{x_2 - x_1}{I}$



Verallgemeinertes Funktional:

$$J^* \overset{(71.3)}{=} J - \sum_\alpha \lambda_\alpha K_\alpha \tag{1}$$

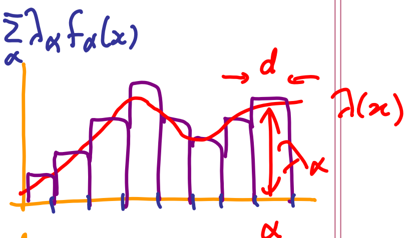
Extremalbedingungen: $0 = \frac{\partial J^*}{\partial \lambda_\alpha} = -K_\alpha$ (2)

[reproduziert (72.3) $\Rightarrow$ (72.2)]

Im Limes $I \to \infty$

$$J^* = \int_{x_1}^{x_2} dx \Big[F(y_i, y_i', x) - \overbrace{g(y_i, x) \underbrace{\sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha(x)}_{\lambda(x)}}^{\sum_\alpha K_\alpha \lambda_\alpha} \Big]$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx\, F^*(y_i, y_i', x) \quad (4) \tag{3}$$



diskreter Index $\alpha \to$ kontinuierlichen Index x.

$$F^*(y_i, y_i', x) = F(y_i, y_i', x) - \lambda(x)\, g(y_i, x) \tag{5}$$

Euler-Lagrange für F^*:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y_i'} = \frac{\partial F^*}{\partial y_i}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y_i, y_i', x)}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y_i} - \lambda(x) \frac{\partial g(y_i, x)}{\partial y_i}} \tag{6}$$

Hamiltonprinzip für System mit holonomen NB liefert Lg1

Betrachte $\mathcal{L}(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}\sum_n m_n \dot{x}_n^2 - U(x,t)$ (1)

$x = (x_1, \dots, x_N)$

also: Koordinaten x_i sind nicht unabhängig, also keine guten verallg. Koordinaten

mit Zwangsbedingungen: $g_\beta(x,t) = 0$ (2)

$\beta = 1, \dots, f$

Wirkung: $S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(x,\dot{x},t)$ (3)

HP besagt:

$\boxed{\text{Dynamische Evolution so, daß } \delta S = 0, \text{ wobei } g_\beta = 0}$ (4)

$F \to L$

$y(x) \to x(t)$

$x \to t$

$\Rightarrow$ Variationsproblem mit holonomen NB!

Erweiterte Lagrange-Funktion:

$$\boxed{\mathcal{L}^*(x,\dot{x},t) = \mathcal{L}(x,\dot{x},t) - \sum_\beta \lambda_\beta(t)\, g_\beta(x,t)}$$ (1)

EL (73.6):

$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y_i} - \lambda(x)\frac{\partial g}{\partial y_i}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_n} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} - \sum_\beta \lambda_\beta(t)\frac{\partial g_\beta}{\partial x_n}$$

(74.1) eingesetzt:

$L = \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 - U(x)$

$$m_n \ddot{x}_n = -\frac{\partial U}{\partial x_n} - \sum_\beta \lambda_\beta(t)\frac{\partial g_\beta}{\partial x_n}$$ (2)

Lg1!!

Fazit: $\boxed{\delta S^* = 0 \iff Lg1}$ (3)

☺

Bemerkungen zu HP

- Elegante, kompakte Formulierung der dyn. Evolution in einer einzigen Gl.
- Hilft jedoch nicht für praktische Lösungen: ELG muss sowieso gelöst werden
- $\mathcal{L}$ ist sehr einfach zu bestimmen
- $\sum_\beta \lambda_\beta \frac{\partial g_\beta}{\partial x_\alpha}$ beschreibt Zwangskräfte

Evaluation: www.physik.uni-muenchen.de/evaluation/vorlesung.html