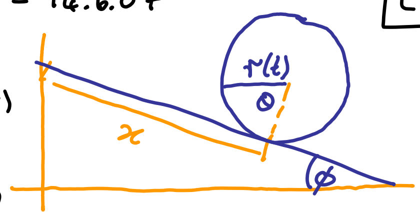
Beispiel: Rollender Reifen mit $r = r(t)$ V17 – 14.6.07 L76



Kinetische Energie $T =$

Potenzielle Energie: $V =$

Zwangsbedingung:

(3) (gleitendes Rollen, holonome Z.B)

Erweiterte Lagrange-Funktion: $L^* =$ (4)

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot x} - \frac{\partial L^*}{\partial x}: \quad M\ddot x - Mg\sin\phi + \lambda = 0 \tag{5}$$

λ: Reibungskraft

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L^*}{\partial \theta}: \quad \overbrace{M r^2\ddot\theta + 2M\cancel{r}\dot r\dot\theta}^{\frac{d}{dt}(Mr^2\dot\theta)} - \lambda\cancel{r} = 0 \tag{6}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot\lambda} - \frac{\partial L^*}{\partial \lambda}: \quad x - r\theta = 0 \tag{7}$$

---

(5) – (7) sind zu lösen. Eliminiere zunächst $\ddot\theta$ zwischen (77.6) und L77

$\dot{(77.7)}$ $$\dot x = r\dot\theta + \dot r\theta \tag{1}$$

$\ddot{(77.7)}$ $$\ddot x = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta + \ddot r\theta \tag{2}$$

z.B. für $r(t) = r_0 + v_1 t$: $$\ddot x = r\ddot\theta + 2v_1\dot\theta + 0 \tag{3}$$

aufgelöst nach $\ddot\theta$ $$r\ddot\theta \overset{(3)}{=} \ddot x - 2v_1\dot\theta \tag{4}$$

(4) in (76.6): $$\lambda = M\Big(\overbrace{\ddot x - 2\cancel{v_1}\dot\theta}^{(4):\ r\ddot\theta} + 2\overset{\dot r}{\cancel{v_1}}\cancel{\dot\theta}\Big) \Rightarrow \lambda = M\ddot x \tag{5}$$

(6) in (76.5) liefert: $$\ddot x = \frac{1}{2} g\sin\phi \tag{6}$$

{rollt nur halb so schnell wie er ohne Reibung rutschen würde!}

$$x(t) = \frac{1}{4} g\sin\phi\, t^2 + v_0 t + x_0 \tag{7}$$

(6) in (5): $\quad \lambda = \frac{1}{2} M g \sin\phi$ = Stärke d. Reibungskraft $\quad (1)$ L78

(1) in (77.4): $\quad r\ddot{\theta} \overset{(3)}{=} \ddot{x} - 2v_1\dot{\theta} \quad (2)$

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin\phi}{2(r_0 + v_1 t)} - 2v_1\dot{\theta} \quad (3)$$

Falls $v_1 = 0$, $r(t) = r_0$: $\quad \ddot{\theta} = \frac{g\sin\phi}{2r} \Rightarrow \theta(t) = \frac{x(t)}{r} \quad (4)$

Falls $v_1 \neq 0$ ist (4) nicht einfach lösbar; aber es gilt offensichtlich, dass $\ddot{\theta} < \frac{g}{2}\frac{\sin\phi}{r_0}$, $\quad (5)$.

d.h. Winkelbeschleunigung ist geringer, wenn Radius mit t zunimmt.

Ende Beispiel.

(Nachträgliche) Bemerkungen zum Hamilton-Prinzip (HP) L80

HP in Worten: "Die Wirkung ist auf der tatsächlich durchlaufenen Bahn stationär gegen kleine Änderungen der Bahn, die mit den Randbedingungen verträglich sind."

a) HP wird auch als "Prinzip der kleinsten Wirkung" bezeichnet. Tatsächlich ist Wirkung jedoch nur stationär (d.h. nicht unbedingt minimal)

b) HP ist analog zum Fermatschen Prinzip:
Licht sucht den extremalen Weg zwischen Quelle und Beobachtungsort.

c) HP liefert elegant, kompakte Formulierung der dynamischen Evolution in <u>einer</u> einzigen Gleichung. (Lagrange-Funktion ist of sehr einfach zu bestimmen.)
[Allgemein: Alle fundamentalen Theorien scheinen sich über Extremalprinzipien formulieren zu lassen!]

d) HP hilft jedoch nicht für praktischen Lösungen: Euler-Lagrange-Gl. muss sowieso gelöst werden. Aber dennoch sehr elegant für allgemeine, formale Aussagen. Z.B.:

i) Kovarianz der Lagrange-Gl. 2. Art unter Koord.-Transf. ist unmittelbare Konsequenz des HP: S[q] ist unabhängig von Parametrisierung für gegebene physikalische Bahnkurve; folglich haben Euler-Lagrange-Gl. die gleiche Form für jede Parametrisierung!

L81

(ii) Invarianz unter "Eichtransformationen":

Betrachte: $L' = L + \frac{d}{dt} M(q,t)$ {totale Ableitung einer beliebigen Funktion v. $q(t)$, t.} (1)

$S = \int_{t_a}^{t_e} dt\, L(q,t)$ $\Rightarrow$ $S'[q] = S[q] +$ (2)

(3)

Unter Variation mit festen Randbedingungen: $\Rightarrow$ $\delta S'[q] =$ (4)

da Randbedingungen fest: (5)

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichungen sind invariant unter Eichtransformat.

$\Rightarrow$ L ist nicht eindeutig festgelegt: $L + \frac{d}{dt} M$ ist "genau so gut"!

<u>Beispiel:</u> <u>Geladenes Teilchen in äußerem elektromagnetischen Feld</u>

L82

Wir wissen (werden in E2 und T3 lernen):

1. $\vec{E}$ und $\vec{B}$ können geschrieben werden als: $\vec{E} =$ (1)

$\vec{B} =$ (2)

[ϕ: skalares Feld, $\vec{A}$: Vektorfeld.]

[Die "elektromagnetischen Potenziale" ϕ, $\vec{A}$ sind keine meßbaren Größen, aber sehr nützlich für kompakte Darstellung vieler Ergebnisse.]

2. Maxwell-Gleichungen sind invariant unter Eichtransformationen der Form:

$\vec{A} \to$ (3)

$\phi \to$ (4)

χ: beliebige Skalare Funktion

Wir werden jetzt zeigen: Diese Info reicht aus, um L zu konstruieren! (mittels drei Naheliegender Forderungen):

L83

1. Forderung: Kopplung des Teilchens an $\vec{A}$, ϕ soll lokal sein (Ableitungen von $\vec{A}, \phi$ sollen nicht vorkommen):

$\Rightarrow$

$$L = \tag{1}$$

2. Forderung: Homogenität und Isotropie der Raumzeit (keine explizite Abhängigkeit von $\vec{r}$, t, Winkeln ...)

$$L = \tag{2}$$

3. Forderung: Bewegungsgl. des Teilchens soll eichinvariant sein:

$$\tag{3}$$

Zusatzterm erlaubt wegen (81.1)

L84

Allgemeinst-denkbare Form von Λ wäre:

$$\Lambda = \tag{1}$$

kommen alle links in (83.3) vor!

Aber: nur $\Lambda = \Lambda(\chi)$ funktioniert: sonst erzeugt $\frac{d}{dt}\Lambda$ Terme wie $\partial_t^2\chi$, $\partial_t\vec{A}$, $\partial_t\phi$, die links in (83.3) nicht vorkommen!

Sei nun χ infinitesimal, und entwickle (83.3) in Potenzen von χ:

(83.3) $$L\left(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot(\vec{A}+\vec{\nabla}\chi), \phi - \tfrac{1}{c}\partial_t\chi\right) = L\left(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}, \phi\right) + \frac{d}{dt}\Lambda$$

Ordnung χ^0: $$L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}, \phi) = L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}, \phi) \tag{2}$$

χ^1:

Koeffizientenvergleich: $$\frac{\partial L}{\partial(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A})} = \tag{3}$$; $$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \tag{4}$$

Hieraus folgt: $L \overset{(84.6)}{=}$ (1) L85

Aber, für freies Teilchen gilt: $L(\vec{A}=0, \phi=0) =$, $\Rightarrow f(\dot{r}^2) =$ (2)

Die Form von L ist nun komplett bestimmt!

Mit Identifikation $c\lambda =$ (3)

ist das Endergebnis: $\boxed{L =}$ (4)

In Übung soll gezeigt werden: Lagrange-Gl.-2 Art liefern Lorentz-Kraft!!