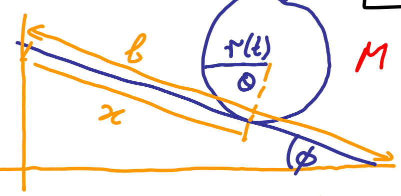
Beispiel: Rollender Reifen mit $r = r(t)$ · $v17$ – 14.6.07



Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{2} M r^2\right)}_{I} \dot{\theta}^2$ (1)

Potenzielle Energie: $V = Mg(\ell - x)\sin\phi$ (2)

wir betrachten nur $r =$ konst. (die Komplikationen für $r = r(t)$ sind zu groß)

Zwangsbedingung: $r\cancel{(t)}\,\theta = x$ (3) (gleitendes Rollen, holonome Z.B.)

Erweiterte Lagrange-Funktion: $L^* = T - V - \lambda(t)\left(x(t) - r\cancel{(t)}\,\theta(t)\right)$ (4)

$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L^*}{\partial x}$: $M\ddot{x} - Mg\sin\phi + \lambda = 0$ (5)

Reibungskraft

$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L^*}{\partial \theta}$: $\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{M}{2} r^2 \dot{\theta}\right)}_{\frac{M}{2} r^2 \ddot{\theta}} - \lambda \cancel{r} = 0$ (6)

$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\partial L^*}{\partial \lambda}$: $x - r\theta = 0$ (7)

---

(5) – (7) sind zu lösen. Eliminiere zunächst $\ddot{\theta}$ zwischen (77.6) und

$(\dot{77.7})$: $\dot{x} = r\dot{\theta}$ (1)

$(\ddot{77.7})$: $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$ (2)

aufgelöst nach $\ddot{\theta}$: $r\ddot{\theta} \overset{(3)}{=} \ddot{x}$ (4)

(4) in (76.6): $\lambda = \frac{M}{2}\ddot{x}$ (5)

(6) in (76.5) liefert: $\ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin\phi$ (6) {rollt nur halb so schnell wie er ohne Reibung rutschen würde!}

$x(t) = \frac{1}{4} g \sin\phi\, t^2 + v_0 t + x_0$ (7)

(6) in (5) :

(1) in (77.4):

$\lambda = \frac{1}{2} M g \sin\phi$ = Stärke d. Reibungskraft (1)

L78

$r\ddot{\theta} \overset{(3)}{=} \ddot{x}$ (2)

$$\ddot{\theta} = \frac{g\sin\phi}{2r} \quad (3)$$

Falls $v_i = 0$, $r(t) = r_0$:

$$\ddot{\theta} = \frac{g\sin\phi}{2r} \quad (4)$$

$$\theta(t) = \frac{g\sin\phi}{2r}\frac{1}{2}t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \quad (5)$$

Ende Beispiel.

L80

(Nachträgliche) Bemerkungen zum Hamilton-Prinzip (HP)

$\delta S[q] = 0$

HP in Worten: "Die Wirkung ist auf der tatsächlich durchlaufenen Bahn stationär gegen kleine Änderungen der Bahn, die mit den Randbedingungen verträglich sind."

$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$

a) HP wird auch als "Prinzip der kleinsten Wirkung" bezeichnet. Tatsächlich ist Wirkung jedoch nur stationär (d.h. nicht unbedingt minimal)

b) HP ist analog zum Fermatschen Prinzip:
Licht sucht den extremalen Weg zwischen Quelle und Beobachtungsort.

c) HP liefert elegant, kompakte Formulierung der dynamischen Evolution in einer einzigen Gleichung. (Lagrange-Funktion ist of sehr einfach zu bestimmen.)
[Allgemein: Alle fundamentalen Theorien scheinen sich über Extremalprinzipien formulieren zu lassen!]

d) HP hilft jedoch nicht für praktischen Lösungen: Euler-Lagrange-Gl. muss sowieso gelöst werden. Aber dennoch sehr elegant für allgemeine, formale Aussagen. Z.B.:

i) Kovarianz der Lagrange-Gl. 2. Art unter Koord.-Transf. ist unmittelbare Konsequenz des HP: S[q] ist unabhängig von Parametrisierung für gegebene physikalische Bahnkurve; folglich haben Euler-Lagrange-Gl. die gleiche Form für jede Parametrisierung! $q \leftrightarrow q'$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q'}\right) = \frac{\partial L}{\partial q'}$

(ii) Invarianz unter "Eichtransformationen":

Betrachte: $$L' = L + \frac{d}{dt} M(q,t) \qquad (1)$$

{totale Ableitung einer beliebigen Funktion v. $q(t)$, t.}

$$S = \int_{t_a}^{t_e} dt\, L(q,t) \Rightarrow S'[q] = S[q] + \underbrace{\int_{t_a}^{t_e} dt\, \frac{d}{dt} M(q,t)}_{M(q(t_e),t_e) - M(q(t_a),t_a)} \qquad (2), (3)$$

Unter Variation mit festen Randbedingungen: $q \to q + \eta$

$$\Rightarrow \delta S'[q] = \delta S[q] + 0 \qquad (4)$$

$\delta[M - M] = 0$

da Randbedingungen fest: $q(t_e) = q_e$, $q(t_a) = q_a$ (5)

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichungen sind invariant unter Eichtransformat.

$\Rightarrow$ L ist nicht eindeutig festgelegt: $L + \frac{d}{dt} M$ ist "genau so gut"!

Beispiel: Geladenes Teilchen in äußerem elektromagnetischen Feld

Wir wissen (werden in E2 und T3 lernen):

1. $\vec E$ und $\vec B$ können geschrieben werden als:

$$\vec E = -\vec\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec A \qquad (1)$$

$$\vec B = \vec\nabla \times \vec A \qquad (2)$$

c = Lichtgeschw.

[ϕ: skalares Feld; $\vec A$: Vektorfeld.]

[Die "elektromagnetischen Potenziale" ϕ, $\vec A$ sind keine meßbaren Größen, aber sehr nützlich für kompakte Darstellung vieler Ergebnisse.]

2. Maxwell-Gleichungen sind invariant unter Eichtransformationen der Form:

$$\vec A \to \vec A^* = \vec A + \vec\nabla\chi \qquad (3)$$

$$\phi \to \phi^* = \phi - \frac{1}{c}\partial_t \chi \qquad (4)$$

χ: beliebige Skalare Funktion

Wir werden jetzt zeigen: Diese Info reicht aus, um L zu konstruieren! (mittels drei Naheliegender Forderungen):

1. Forderung: Kopplung des Teilchens an $\vec{A}$, ϕ soll <u>lokal</u> sein (Ableitungen von $\vec{A}, \phi$ sollen <u>nicht</u> vorkommen):

$$\Rightarrow \quad L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \vec{A}(\vec{r},t), \phi(\vec{r},t)) \tag{1}$$

2. Forderung: Homogenität und Isotropie der Raumzeit (keine explizite Abhängigkeit von $\vec{r}$, t, Winkeln ...)

$$L = L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}, \phi) \tag{2}$$

aber nicht: $\vec{r}\cdot\vec{A}$ X

3. Forderung: Bewegungsgl. des Teilchens soll eichinvariant sein:

$$L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}(\vec{A}+\nabla\chi), \phi - \tfrac{1}{c}\partial_t\chi) = L' = L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}, \phi) + \frac{d}{dt}\Lambda \tag{3}$$

Zusatzterm erlaubt wegen (81.1)

Allgemeinst-denkbare Form von Λ wäre:

$$\Lambda = \Lambda(\chi, \cancel{\nabla\chi}, \cancel{\partial_t\chi}, \cancel{\vec{A}}, \cancel{\phi}) \tag{1}$$

kommen alle links in (83.3) vor!

$\frac{d}{dt}\Lambda = \Lambda' \times \frac{d}{dt}\nabla\chi$

<u>Aber:</u> nur $\Lambda = \Lambda(\chi)$ funktioniert: sonst erzeugt $\frac{d}{dt}\Lambda$ Terme wie $\partial_t^2\chi$, $\partial_t\vec{A}$, $\partial_t\phi$, die links in (83.3) nicht vorkommen! $\Rightarrow \Lambda = \Lambda(\chi)$

Sei nun χ infinitesimal, und entwickle (83.3) in Potenzen von χ:

$$(83.3) \quad L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot(\vec{A}+\nabla\chi), \phi - \tfrac{1}{c}\partial_t\chi) = L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}, \phi) + \frac{d}{dt}\Lambda$$

Ordnung χ^0:

$$L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}, \phi) = L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}, \phi) \tag{2}$$

$\Lambda = \Lambda(\chi, \vec{r}, t)$

χ^1:

$$\frac{\partial L}{\partial(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A})}(\dot{\vec{r}}\cdot\nabla\chi) + \boxed{\frac{\partial L}{\partial\phi}}\left(-\frac{1}{c}\partial_t\chi\right) = \underbrace{\boxed{\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial\chi}\right|_{\chi=0}}}_{=\lambda}(\nabla\chi\cdot\dot{\vec{r}} + \partial_t\chi) \tag{3}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\frac{\partial L}{\partial(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A})} = \lambda \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial\phi} = -c\lambda \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

$q_k = (x_1, x_2, x_3) = \vec{r}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}}\left(\dot{\vec{r}}^2\right) = \dot{\vec{r}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}}\left(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}\right) = \vec{A}$$

Hieraus folgt: $L \overset{(84.6)}{=} \lambda(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}) - c\lambda\phi + f(\dot{\vec{r}}^2)$ (1) L85

Aber, für freies Teilchen gilt: $L(\vec{A}=0, \phi=0) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2, \Rightarrow f(\dot{\vec{r}}^2) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$ (2)

Die Form von L ist nun komplett bestimmt!

Mit Identifikation $c\lambda = q$ = Ladung des Teilchens (3)

ist das Endergebnis: $\boxed{L \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q\left[\frac{1}{c}\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) - \phi\right]}$ (4)

ELG: $\vec{F}_{Lorentz} = -\vec{\nabla}\phi + \frac{q}{c}(\dot{\vec{r}}\times\vec{B})$ (?)

In Übung soll gezeigt werden: Lagrange-Gl. 2 Art liefern Lorentz-Kraft!!