Noether-Theorem (wichtig für QM, QFT)   V18 - 18.6.07   L80

Jede einparametrige Schar von Transformationen, unter denen die Wirkung invariant ist, führt zu einer Erhaltungsgrösse!

Zur Erinnerung: Falls Lagrange-Funktion nicht explizit von Koordinate q_K abhängt (zyklisch), ist generalisierter Impuls erhalten:

$$\frac{\partial L}{\partial q_K} \overset{(Lg2)}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_K} \quad \Rightarrow \qquad (1)$$

Alternative Formulierung:
Betrachte Koord.transf.:

$$q_K \rightarrow \qquad (2a)$$

(2a)

$$\dot q_K \rightarrow \qquad (2b)$$

Def. transformierte Lagrange-Funktion:

$$L'(q', \dot q'; t, \varepsilon) := \qquad (3)$$

$$\overset{(2)}{=} \qquad (4)$$

(da q zyklisch ist)

Fazit: Lagrange-Fn. ist "invariant" unter (1) $\Rightarrow$ Erhaltungsgröße (1)

L81

Frage: Gibt es einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Transf., die Lagrange-Fn. invariant lassen, und Erhaltungsgrößen?

Satz: Noethersches Theorem
Gegeben sei eine ein-eindeutige Koordinatentransformation,

$$q_K = \qquad K = 1, \dots, f \qquad (1)$$

$$q'_K = \qquad K = 1, \dots, f \qquad (2)$$

in einem kontinuierlich veränderlichen, differenzierbarem Parameter
Für sei diese Transformation die Identität. Wenn die Lagrange-Fn. unter dieser Transf. invariant ist, gibt es eine Erhaltungsgröße (Integral der Bewegung):

(3)

Beispiel: Rotation um z-Achse für:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) \qquad (1)$$

hängt nur vom Abstand zur z-Achse ab

i) Zugang über kartesische Koord:

$x' =$ $\qquad x =$ (2a)

$y' =$ $\qquad y =$ (2b)

$z' =$ $\qquad z =$

Def. transformierte Lagrange-Funktion:

$$L'(q', \dot{q}'; t, \varepsilon) \overset{(80.3)}{:=} L\left(q(q';\varepsilon), \dot{q}(\dot{q}', \varepsilon), t\right) \qquad (3)$$

$$= \frac{m}{2}\left[\left(\dot{x}' \cos\varepsilon + \dot{y}' \sin\varepsilon\right)^2 + \left(-\dot{x}' \sin\varepsilon + \dot{y}' \cos\varepsilon\right)^2 + \dot{z}'^2\right] - V\left(\left(x' \cos\varepsilon + y' \sin\varepsilon\right)^2 + \left(-x' \sin\varepsilon + y' \cos\varepsilon\right)^2, z'\right)$$

$$= \qquad (4)$$

Fazit: $L'(q', \dot{q}', t, \varepsilon) =$ (5)

Erhaltungsgröße:

$$I(q, \dot{q}) \overset{(81.3)}{=} \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left.\frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \qquad (1)$$

$$\left.\frac{\partial x(q', \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial y(q', \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \qquad (3)$$

$$I = \qquad (4)$$

ii) Zugang über Zylinder-Koord:

$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi, \qquad z = z \qquad (5)$$

$$L = \qquad (6)$$

Generalisierter Impuls:

$$\text{const} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \qquad (7)$$

oder: Invarianz unter $\varphi' = \varphi + \varepsilon$:

$$I = \qquad (8)$$

Beweis des Noetherschen Satzes:

verallg. von (80.3)

Def. transformierte Lagrange-Funktion: $L'(q', \dot{q}'; t, \varepsilon) :=$ (1)

Betrachte: $\frac{dL'}{d\varepsilon} =$ (2)

$=$ (3)

Invarianz der Lagrange-Fn bedeutet: $L'(q', \dot{q}', t; \varepsilon) = L(q', \dot{q}'; t)$ (4)

$\varepsilon = 0$ nicht zwingend nötig, aber es vereinfacht die Analyse

$\overset{(4)}{\Longrightarrow}$ $\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon}$

$\overset{(3)}{\Longrightarrow}$ $\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} =$ (5)

Erweitertes Noether-Theorem:

Wenn sich die Lagrange-Fn. unter der Koord.Transf. um eine Eichtr. verändert,

$$L'(q', \dot{q}'; t, \varepsilon) = L(q', \dot{q}'; t) + \frac{d}{dt} M(q'; t, \varepsilon) \, , \quad (1)$$

lautet die Erhaltungsgröße:

$$I(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k(q'; t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon = 0} \quad (2)$$

Beweis: analog zum vorigen Beweis:

(1): $L'(q', \dot{q}'; t, \varepsilon) - \frac{d}{dt} M(q'; t, \varepsilon) \overset{(1)}{=} L(q', \dot{q}'; t)$ (3)

$\frac{d}{dt} \quad \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{}_k} \frac{\partial q_k(q'; t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}$ (4)

$\Longrightarrow$ $\square$. (5)

Beispiel: Freier Fall im Schwerfeld: $L(z,\dot z) = \frac{m}{2}\dot z^2 - mgz$ (1) L86

Betrachte Galileo-Transf.: $z' =$, $z =$ (2)

Def. transformierte Lagrange-Funktion: $L'(z', \dot z'; t, \varepsilon) =$ (3)

$= \frac{m}{2}\dot z'^2 - mgz' - \varepsilon m \dot z' + \frac{m}{2}\varepsilon^2 + mg\varepsilon t$ (4)

$=$ (5)

Erhaltungsgröße: $I(z,\dot z) \overset{(85.2)}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot z}\frac{\partial(\quad)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial M(z';t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$ (6)

$=$ (7)

(7) ist konst., denn:
$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + vt + z_0$: $=$ (8)

In diesem Fall ist die erhaltene Größe

L87

Bemerkungen:
1) Lagrange-Mechanik: kont. Symmetrie liefert Erhaltungsgröße;
aber Umkehrung erst in der Hamiltonschen Mechanik gültig

2) I ist im Prinzip Funkt. von aber -Abhängigkeit bringt keine neue Information. Deswegen immer nur Betrachtung von
Deshalb reicht tatsächlich schon Invarianz unter infinitesimal Transf. wobei Terme vernachlässigt werden.

Im Beispiel von (82.2):

$x' =$, $x =$
$y' =$, $y =$ (1)
$z' =$, $z =$

$L'(q', \dot q'; t, \varepsilon) := L(q(q',\varepsilon), \dot q(q', \dot q'; \varepsilon))$ (2)

$= \frac{m}{2}\left[(\dot x' + \dot y'\varepsilon)^2 + (\dot y' - \dot x'\varepsilon)^2 + \dot z'^2\right] - V\left((x'+y'\varepsilon)^2 + (y'-x'\varepsilon)^2, z'\right)$ $+ O(\varepsilon^2)$

$= \frac{m}{2}\left[\dot x'^2 + \dot y'^2 + \dot z'^2\right] - V(x'^2 + y'^2, z') + O(\varepsilon^2)$

$= L(q', \dot q') + O(\varepsilon^2)$ (3)

deswegen ist Noether-Theorem anwendbar mit Erhaltungsgröße: L88

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x(x', y'; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y(x', y'; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \quad (1)$$

$$= \quad (2)$$

3) Das Noether-Theorem gilt nicht für Transf, die nicht von einem <u>kontinuierlichen</u> Parameter abhängen. Beispiel Koordinatenspiegelung: (3)

Bisher war Zeitabhängigkeit ausgeklammert.

<u>Satz:</u> Lagrange-Fn. sei unter Zeittransl. invariant: $L(q, \dot{q}; t) = L(q, \dot{q};\quad)$ (4)

Dann ist $I =$ eine Erhaltungsgröße. (5)

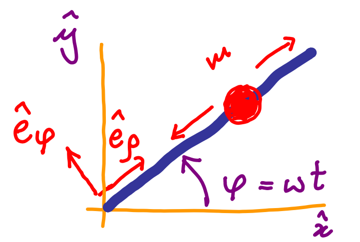
(Bemerkung: für skleronome Zwangsbedingungen wird I später zur Hamiltonfn.)

Beweis: $\frac{d}{dt} L =$ (6)

(7)

Für zeitunabhängige Potenziale aber rheonome(zeitabhängige) Zwangsbed., liefert obiger Satz eine Erhaltungsgröße, die aber nicht als Energie zu interpretieren ist: L89

Beispiel: Perle auf rotierndem Stab Vorlesung 10, Seite L22):



$$x = \rho \cos \omega t, \quad y = \rho \sin \omega t$$

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \omega^2)$$

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \dot{\rho} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = m\dot{\rho}^2 - \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2)$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 - \rho^2 \omega^2)$$

Check ob das stimmt: Lösung d. Bewegungsgl: (L24.4) $\rho(t) = \rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t}$.

$$I = \frac{m}{2}\left[\omega^2(-\rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t})^2 - \omega^2(\rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t})^2\right]$$

$$=$$

Energie kann hier keine Erhaltungsgröße sein, da Zwangskraft arbeit verrichtet!