Noether-Theorem (wichtig für QM, QFT) V18 - 18.6.07

Jede einparametrige Schar von Transformationen, unter denen die Wirkung invariant ist, führt zu einer Erhaltungsgrösse!

Zur Erinnerung:

Falls Lagrange-Funktion nicht explizit von Koordinate q_K abhängt (zyklisch), ist generalisierter Impuls erhalten:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_K} \overset{(Lgz)}{=} \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_K}}_{p_K} \quad \Rightarrow \quad \dot p_K = 0\,, \quad p_K = \text{const.} \qquad (1)$$

Alternative Formulierung:

Betrachte Koord.transf.:

$$q_K = q_K' - \varepsilon$$

$$q_K \to q_K + \varepsilon =: q_K' = q_K'(q_K, \varepsilon) \quad \forall K \qquad (2a)$$

(2a)$^{\cdot}$

$$\dot q_K \to \dot q_K = \dot q_K' \,, \qquad (2b)$$

Def. transformierte Lagrange-Funktion:

$$L'(q', \dot q'; t, \varepsilon) := L(q(q', \varepsilon), \dot q(\dot q'), t) \qquad (3)$$

$$\overset{(2)}{=} L(q', \dot q', t) \qquad (4)$$

(da q zyklisch ist)

Fazit: Lagrange-Fn. ist "invariant" unter (1) $\Rightarrow$ Erhaltungsgröße (1)

Frage: Gibt es einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Transf., die Lagrange-Fn. invariant lassen, und Erhaltungsgrößen?

Satz: Noethersches Theorem

Gegeben sei eine ein-eindeutige Koordinatentransformation,

$$q_K = q_K(q_1', \dots, q_K'; t, \varepsilon) \qquad K = 1, \dots, f \qquad (1)$$

$$q_K' = q_K'(q_1, \dots, q_K; t, \varepsilon) \qquad K = 1, \dots, f \qquad (2)$$

in einem kontinuierlich veränderlichen, differenzierbarem Parameter ε.
Für $\varepsilon = 0$ sei diese Transformation die Identität. Wenn die Lagrange-Fn. unter dieser Transf. invariant ist, gibt es eine Erhaltungsgröße (Integral der Bewegung):

$$I(q, \dot q) = \sum_{K=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_K} \left. \frac{\partial q_K(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon = 0} \qquad (3)$$

L82

Beispiel: Rotation um z-Achse für:

$$L = \frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) - V(\underbrace{x^2+y^2}_{\text{hängt nur vom Abstand zur z-Achse ab}}, z) \quad (1)$$

i) Zugang über kartesische Koord.:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon \qquad x = x'\cos\varepsilon + y'\sin\varepsilon \quad (2a)$$

$$y' = x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon \qquad y = -x'\sin\varepsilon + y'\cos\varepsilon \quad (2b)$$

$$z' = z \qquad z = z'$$

Def. transformierte Lagrange-Funktion:

$$L'(q',\dot q';t,\varepsilon) \overset{(80.3)}{:=} L\big(q(q',\varepsilon),\, \dot q(\dot q',\varepsilon),\, t\big) \quad (3)$$

$$= \frac{m}{2}\Big[\big(\underbrace{\dot x'\cos\varepsilon + \dot y'\sin\varepsilon}_{\dot x}\big)^2 + \big(\underbrace{-\dot x'\sin\varepsilon + \dot y'\cos\varepsilon}_{\dot y}\big)^2 + \underbrace{\dot z'^2}_{\dot z^2}\Big]$$

$$- V\Big(\big(\underbrace{x'\cos\varepsilon + y'\sin\varepsilon}_{x}\big)^2 + \big(\underbrace{-x'\sin\varepsilon + y'\cos\varepsilon}_{y}\big)^2,\, z'\Big)$$

$$= \frac{m}{2}(\dot x'^2 + \dot y'^2 + \dot z'^2) - V(x'^2+y'^2, z') = L(q', \dot q') \quad (4)$$

Fazit:

$$L'(q',\dot q',t,\varepsilon) = L(q',\dot q',t) \quad (5)$$ invariant unter Rot. um z-Achse!

L83

Erhaltungsgröße:

$$I(q,\dot q) \overset{(81.3)}{=} \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\, \frac{\partial q_k(q',t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \quad (1)$$

$x = x'\cos\varepsilon + y'\sin\varepsilon$

$y = -x'\sin\varepsilon + y'\cos\varepsilon$

$$\frac{\partial x(q',\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = (-x'\sin\varepsilon + y'\cos\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = y'\Big|_{\varepsilon=0} = y \quad (2)$$

$$\frac{\partial y(q',\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = (-x'\cos\varepsilon - y'\sin\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = -x'\Big|_{\varepsilon=0} = -x \quad (3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial\varepsilon} = 0$$

$$I = m\dot x y + m\dot y(-x) = \underline{-m(x\dot y - y\dot x)} = -L_z \quad (4)$$

$= $ Drehimpuls um z-Achse

ii) Zugang über Zylinder-Koord.:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z \quad (5)$$

L inv. unter: $\varphi' = \varphi + \varepsilon$, $\varphi = \varphi' - \varepsilon$ $\qquad \frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon} = 0$

$$L = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - V(\rho^2, z) \Rightarrow \varphi \text{ zyklisch} \quad (6)$$

Generalisierter Impuls:

$$\text{const} = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = m\rho^2\dot\varphi \overset{(5)}{=} m(x\dot y - y\dot x) = L_z \quad (7)$$

oder: Invarianz unter $\varphi' = \varphi + \varepsilon$:

$$I = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\, \frac{\partial(\varphi' - \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = -m\rho^2\dot\varphi = (4) \quad (8)$$

Beweis des Noetherschen Satzes: verallg. von (80.3)

Def. transformierte Lagrange-Funktion:

$$L'(q',\dot q';t,\varepsilon) := L\big(q(q',t,\varepsilon);\ \dot q(q',\dot q';t,\varepsilon),t\big) \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}q(q',t,\varepsilon)$$

Betrachte:

$$\frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} = \sum_{k=1}^{f}\Big[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{(Lg2)\ \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)}\frac{\partial q_k(q',t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\frac{d}{dt}\frac{\partial q_k(q',t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big] \qquad (2)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\frac{\partial q_k(q',t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big] \qquad (3)$$

Invarianz der Lagrange-Fn bedeutet:

$$L'(q',\dot q',t;\varepsilon) = L(q',\dot q';t) \qquad (4)$$

$\varepsilon = 0$ nicht zwingend nötig, aber es vereinfacht die Analyse

$\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $$\frac{\partial L'}{\partial\varepsilon} \overset{(4)}{=} \frac{\partial L(q',\dot q';t)}{\partial\varepsilon} = 0$$

, gilt für alle ε, also auch für $\varepsilon=0$

$\overset{(3),(4)}{\Rightarrow}$ $$\boxed{\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\frac{\partial q_k(q',t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} =: I(q,\dot q) = \text{const} = \text{Erhaltungsgröße}} \qquad (5)$$

Erweitertes Noether-Theorem:

Wenn sich die Lagrange-Fn. unter der Koord.Transf. (81.2) um eine Eichtr. verändert,

$$L'(q',\dot q';t,\varepsilon) = L(q',\dot q';t) + \frac{d}{dt}M(q';t,\varepsilon), \qquad (1)$$

lautet die Erhaltungsgröße:

$$\tilde I(q,\dot q) = \underbrace{\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\frac{\partial q_k(q';t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}}_{(81.3)} - \frac{\partial M(q';t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \qquad (2)$$

Beweis: analog zum vorigen Beweis:

$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(1)$: $$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big[\underbrace{L'(q',\dot q';t,\varepsilon) - \frac{d}{dt}M(q';t,\varepsilon)}_{(84.3)}\Big] \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}L(q',\dot q';t) = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\Big[\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot q_k}\frac{\partial q_k(q';t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} - \frac{\partial M(q';t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big]_{\varepsilon=0}}_{=\tilde I(q,\dot q) = (2)} = 0 \qquad (4)$$

gilt für alle ε also auch für

$\Rightarrow$ $$\frac{d}{dt}\tilde I(q,\dot q) = 0 \qquad \square. \qquad (5)$$

Beispiel: Freier Fall im Schwerfeld: $L(z,\dot z) = \frac{m}{2}\dot z^2 - mgz$ (1)

Betrachte Galileo-Transf: $z' = z + \varepsilon t \; , \qquad z = z' - \varepsilon t$ (2)

Def. transformierte Lagrange-Funktion:

$$L'(z',\dot z';t,\varepsilon) = L(z(z',\varepsilon),\dot z(\dot z',\varepsilon)) = \frac{m}{2}(\dot z'-\varepsilon)^2 - mg(z'-\varepsilon t) \quad (3)$$

$$= \frac{m}{2}\dot z'^2 - mgz' - \varepsilon m\dot z' + \frac{m}{2}\varepsilon^2 + mg\varepsilon t \quad (4)$$

$$= L(z',\dot z') + \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}m\varepsilon^2 t + \frac{1}{2}mg\varepsilon t^2 - m\varepsilon z'\right)}_{M(z';t,\varepsilon)} \quad (5)$$

Erhaltungsgröße:

$$\tilde I(z,\dot z) \overset{(85.2)\,=\,(85.4)}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot z}\frac{\partial(z'-\varepsilon t)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial M(z';t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \quad (6)$$

$$= m\dot z(-t) - \left[m\cancel{\varepsilon}t + \frac{1}{2}mgt^2 - m\overset{z+\cancel{\varepsilon t}}{z'}\right]_{\varepsilon=0} = m\left(z - t\dot z - \frac{1}{2}gt^2\right) \quad (7)$$

(7) ist konst., denn:

$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + vt + z_0$:

$$= m\left[-\cancel{\tfrac{1}{2}gt^2} + \cancel{vt} + z_0 - t(-\cancel{gt} + \cancel{v}) - \cancel{\tfrac{1}{2}gt^2}\right] = mz_0 = \text{const.} \;! \quad (8)$$

In diesem Fall ist die erhaltene Größe eine der Anfangsbedingungen!

Bemerkungen:

1) Lagrange-Mechanik: kont. Symmetrie liefert Erhaltungsgröße; aber Umkehrung erst in der Hamiltonschen Mechanik gültig

2) I ist im Prinzip Funkt. von ε aber ε-Abhängigkeit bringt keine neue Information. Deswegen immer nur Betrachtung von $\varepsilon \to 0$. Deshalb reicht tatsächlich schon Invarianz unter infinitesimal Transf. wobei Terme $O(\varepsilon^2)$ vernachlässigt werden.

Im Beispiel von (82.2):

$$\begin{aligned} x' &= x - y\varepsilon + O(\varepsilon^2) & x &= x' + y'\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ y' &= y - x\varepsilon + O(\varepsilon^2) & y &= y' - x'\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ z' &= z & z &= \end{aligned} \quad (1)$$

$$L'(q',\dot q';t,\varepsilon) := L(q(q',\varepsilon),\dot q(q',\dot q';\varepsilon)) + O(\varepsilon^2) \quad (2)$$

$$= \frac{m}{2}\left[(\dot x' + \dot y'\varepsilon)^2 + (\dot y' - \dot x'\varepsilon)^2 + \dot z'^2\right] - V\left((x'+y'\varepsilon)^2 + (y'-x'\varepsilon)^2, z'\right)$$

$$= \frac{m}{2}\left[\dot x'^2 + \dot y'^2 + \dot z'^2\right] - V(x'^2+y'^2, z') + O(\cancel{\varepsilon}^2)$$

$$= L(q',\dot q') + O(\varepsilon^2) \quad (3)$$

deswegen ist Noether-Theorem anwendbar mit Erhaltungsgröße:

(87.1)
$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot x}\frac{\partial x(x',y';\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot y}\frac{\partial y(x',y';\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \quad (1)$$

$$= m\dot x y'\big|_{\varepsilon=0} - m\dot y x'\big|_{\varepsilon=0} = m(\dot x y - \dot y x) \quad (2)$$

3) Das Noether-Theorem gilt nicht für Transf, die nicht von einem kontinuierlichen Parameter abhängen. Beispiel Koordinatenspiegelung: $x \to -x$ (3)

Bisher war Zeitabhängigkeit ausgeklammert.

Satz: Lagrange-Fn. sei unter Zeittransl. invariant: $L(q,\dot q;t) = L(q,\dot q;t+\varepsilon)$ (4)

Dann ist $\tilde{\tilde{I}} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k - L$ eine Erhaltungsgröße. (5)

(zeitunabh.)

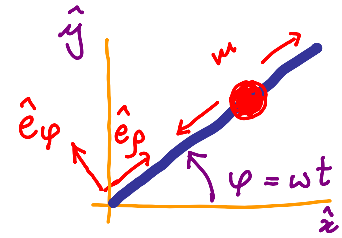
(Bemerkung: für skleronome Zwangsbedingungen wird I später zur Hamiltonfn.)

Beweis:
$$\frac{d}{dt}L = \sum_{k=1}^{f}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\substack{(L9.2)\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}}}\dot q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\ddot q_k + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0}\Big) = \frac{d}{dt}\Big[\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\dot q_k\Big] \quad (6)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\tilde{\tilde{I}} = 0 \quad (7)$$

Für zeitunabhängige Potenziale aber rheonome(zeitabhängige) Zwangsbed., liefert obiger Satz eine Erhaltungsgröße, die aber nicht als Energie zu interpretieren ist:

Beispiel: Perle auf rotierndem Stab Vorlesung 10, Seite L22):



$$x = \rho\cos\omega t, \quad y = \rho\sin\omega t$$

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\omega^2)$$

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot\rho}\dot\rho + \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\dot\varphi - L = m\dot\rho^2 - \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\omega^2)$$

$$= \frac{m}{2}(\dot\rho^2 - \rho^2\omega^2)$$

(L24.4)

Check ob das stimmt: Lösung d. Bewegungsgl.: $\rho(t) = \rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t}$.

$$I = \frac{m}{2}\Big[\omega^2(-\rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t})^2 - \omega^2(\rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t})^2\Big]$$

$$= -m\omega^2\rho_1\rho_2 = \text{const.}$$

Energie kann hier keine Erhaltungsgröße sein, da Zwangskraft arbeit verrichtet!