Virialsatz: "Nachtrag" zur Newtonschen Mechanik (keine Zwangskräfte) L90

Gelegentlich/häufig ist die Lösung von Systemen mit vielen Freiheitsgraden schwierig bis unmöglich. Nützliche Information kann dann der Virialsatz liefern.

Def. Zeitlicher Mittelwert einer Größe:

$$O(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t), \dot{\vec{r}}_1(t) \dots \dot{\vec{r}}_N(t)) \qquad (1)$$

z.B. T oder U

Satz (Virialsatz): Falls alle $\vec{r}_i$ und $\dot{\vec{r}}_i$ im Verlauf der Zeit endlich bleiben, gilt:

$$\boxed{\overline{T} = \qquad\qquad} \qquad (2)$$

[z.B. für Planeten auf Ellipsen, oder Gasteilchen im Behälter]

Beweis:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \qquad (3)$$

part. Integration

$$= \frac{1}{t} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \Big[\qquad \Big] \qquad (4)$$

$$\overline{T} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \qquad \square \qquad (5)$$

Lemma: Für Potentialkräfte mit einem Potential, das eine homogene Funktion Grades ist,

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \qquad (1)$$

[z.B.: $V = \sum_{i,j}^{N} \frac{V_0}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{\alpha}}$] L91

besagt der Virialsatz:

$$2\overline{T} = \qquad (2)$$

Beweis: Für homogene Funktionen gilt:

einerseits: $(1)_R$ (3a)

$$\frac{d}{d\lambda} V(\lambda \vec{r}_1, \dots) =$$

andererseits: $(1)_L$ (3b)

Einsetzen: $\lambda = 1$:

(3a) = (3b)

$$n \cancel{\lambda^{n-1}}^{=1} V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{r}_i \qquad (4)$$

Speziell für Virialsatz:

$$2\overline{T} = \sum_{i=1}^{N} \overline{\vec{r}_i \cdot (-\vec{F}_i)} \qquad (5) \ \square$$

Beispiele:

(i) Harmonischer Oszillator: $n =$ $\Rightarrow$ (1)

Energieerhaltung gilt immer: $T + V = E$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \quad \bar{T} = \bar{V} =$ (3)

(ii) Kepler-Problem: $n =$ $\Rightarrow$ (4)

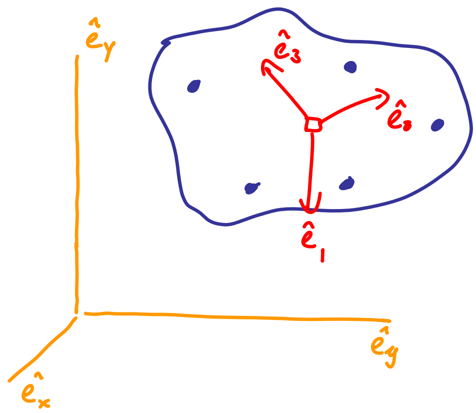
(4), (2) $\Rightarrow$

$\bar{T} =$, $\bar{V} =$ (5)

Bemerkung: Ein Satellit, der durch Reibung Energie verliert (E wird negativer), gewinnt an kinetischer Energie (fliegt schneller)!

Starrer Körper

(SK) (Fliessbach, Kap. 19) V19 – 21.6.07



Def. SK = System v. Massenpunkten m_ν, deren Abstände $|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|$ konstant sind.

Zur Beschreibung benötigt:

Raumfestes IS:

Körperfestes KS:

SK hat Freiheitsgrade: Koordinaten für Ursprung v. KS relativ zu Ursprung eines IS

Winkel für Orientierung v. Körperfesten Achsen v. KS rel. zu raumfesten Achsen eines IS

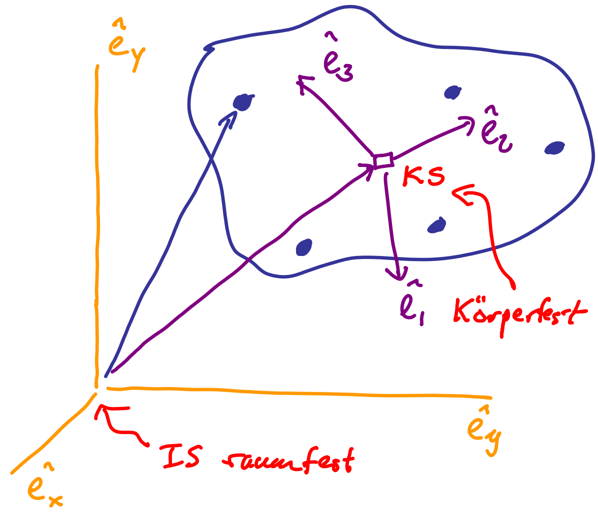
[**Def:** <u>Kreisel</u> ist ein SK, bei dessen Bewegung <u>ein Punkt</u> festgehalten wird (nur Winkelfreiheitsgrade)]

Es sei:

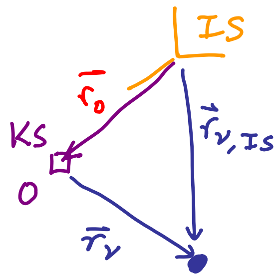
Ortsvektor, Geschw.

des Ursprungs v. KS rel zum Ursprung v. IS.

die Koordinaten eines Punktes P_ν in $\begin{cases} \text{KS} \\ \text{IS} \end{cases}$



KS rotiere mit Winkelgeschw. relativ zu IS: $\dot{\hat e}_i =$



$\vec r_{\nu,IS}(t) =$ (1)

$\dot{\vec r}_{\nu,IS}(t) = \frac{d}{dt}\vec r_{\nu,IS} =$ (2)

Zeitableitung bezieht sich auf's IS: in einem SK, denn alle Punkte ruhen bezüglich KS

$\Longrightarrow$ $\boxed{\vec v_{\nu,IS} = \quad}$ (3)

Falls Ursprung v. KS bei O' gewählt wird. $\vec r_0{}' =$, $\vec r_\nu{}' =$, (4)

Analog zu (3): $\vec v_{\nu,IS} =$ (5)

(3) = (5): gilt für alle ν $\quad \vec v_0 + \vec\omega \times \vec r_\nu = \vec v_0{}' + \vec\omega{}' \times \vec a + \vec\omega{}' \times \vec r_\nu$ (6)

(3.6) gilt für alle $\vec{r}_\nu \in \{SK\} \Rightarrow$ (1)

(2)

SK4

(2): Geschw. $\vec{v}_0'$ ist abhängig v. Wahl des KS.

(1): Winkelgeschw. ist unabhängig v. Wahl des KS !!

(Charakterisiert Drehbewegung an sich)

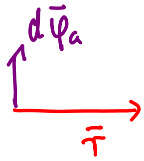
Fazit: O darf nach Belieben/Zweckmässigkeit gewählt werden.

Addition v. Winkelgeschw:

SK5

Warum lassen sich Winkelgeschw. addieren wie Vektoren?

Betrachte 2 aufeinander folgende Drehungen: $d\vec{\varphi}_a = \vec{\omega}_a\, dt$ und $d\vec{\varphi}_b = \vec{\omega}_b\, dt$ (1)



$d\vec{\varphi}_a$ angewandt auf $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}_a$, (2)

$d\vec{\varphi}_b$ angewandt auf $\vec{r} + d\vec{r}_a \rightarrow (\vec{r} + d\vec{r}_a) + d\vec{r}_b$,

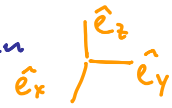
ignoriere $(d\vec{\varphi}_b \times d\vec{r}_a)$ (3)

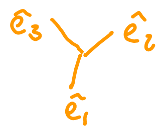
Insgesamt: $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}$, mit $d\vec{r} =$

Infinitesimale Drehgn. sind offenbar vertauschbar $=$
(endliche nicht!)

Fazit: Gleichzeitiges Drehen mit $\vec{\omega}_a$ und $\vec{\omega}_b$ liefert $=$
Gesamtwinkelgeschw.

Euler'sche Winkel (EW)

Wie dreht man 

auf 

?? SK6

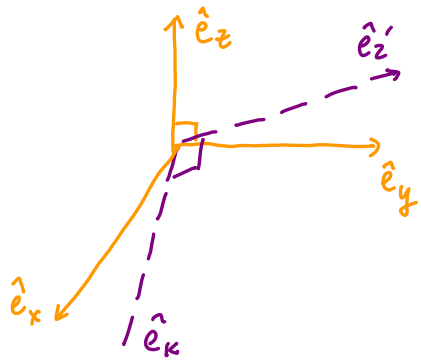
1) ϕ - Drehung um $\hat e_z$:

$\hat e_x \perp \hat e_y \perp \hat e_z$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\perp \quad \perp$

[ϕ : Winkel zwischen und]

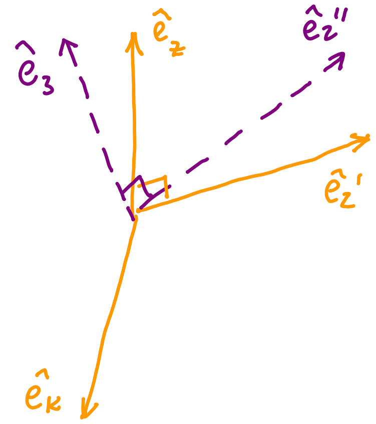


2) θ - Drehung um $\hat e_K$:

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\perp \quad \perp$

[θ : Winkel zwischen und]



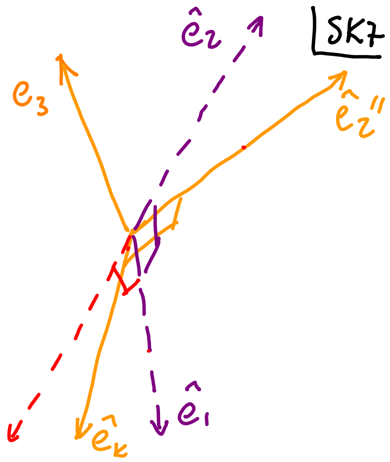
3) ψ - Drehung um $\hat e_3$:

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

[ψ : Winkel zwischen und]

$\perp \quad \perp$

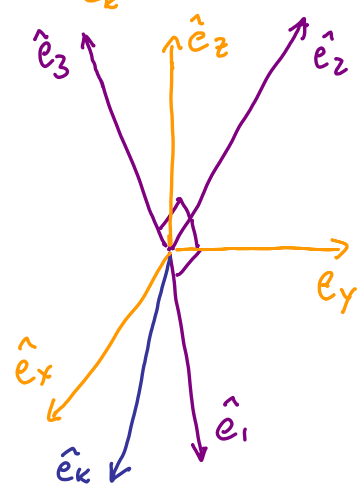
SK7



Also: $\hat e_z \overset{(2)}{=}$ (1a)

$\hat e_z'' \overset{(3)}{=}$ (1b)

$\hat e_K \overset{(3)}{=}$ (1c)



Netto Endergebnis: Winkeländerungen pro dt definieren Winkelgeschwindigkeiten: (WG)

$\vec\omega_\phi \overset{(1)}{=}$ (2a)

$\vec\omega_\theta \overset{(2)}{=}$ (2b)

$\vec\omega_\psi \overset{(3)}{=}$ (2c)

SK8

Gesamt WG: $\vec{\omega} =$ (1)

WG nach Komponenten zerlegt: $\vec{\omega} = \omega_x \hat{e}_x + \omega_y \hat{e}_y + \omega_z \hat{e}_z := (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ in IS (2a)

$\vec{\omega} = \sum_i \omega_i \hat{e}_i$

$\hat{e}_j \cdot \vec{\omega} = \sum_i \omega_i \underbrace{\hat{e}_j \cdot \hat{e}_i}_{\delta_{ij}} = \omega_j$

$= \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3 := (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ in KS (2b)

z.B.:

$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_z \overset{(7.1a)}{=}$

$\overset{(7.1b)}{=}$

$\omega_i =$ (3)

$\omega_1 = \hat{e}_1 \cdot \vec{\omega} =$ (7.1a) (7.1b) (7.1c) (4a)

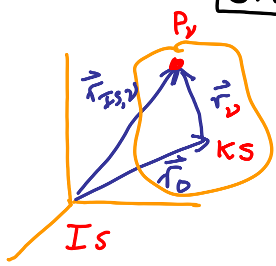
$\omega_2 = \hat{e}_2 \cdot \vec{\omega} = \dot{\phi} \underset{(7.1a)}{\sin\theta} \underset{(7.1b)}{\cos\psi} - \underset{(7.1c)}{\dot{\theta} \sin\psi}$ (4b)

$\omega_3 = \hat{e}_3 \cdot \vec{\omega} = \dot{\phi} \underset{(7.1a)}{\cos\theta} + \dot{\psi}$ (4c)

Nun kennen wir WG als Funktion von ϕ, θ, ψ und $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$

SK9

Trägheitstensor eines SK (Fliessbach, Kap. 20)



$\vec{r}_{IS,\nu} = \vec{r}_0 + \vec{r}_\nu$, (1a) $\vec{v}_{IS,\nu} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu$ (1b)

Kinetische Energie: $2T =$ (2)

$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left[\qquad \right]$ (3)

Term (c): $= 2 \sum_\nu m_\nu (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu) \cdot \vec{v}_0 =$

$= 0$, falls entweder (ruht), oder (4a)

(Ursprung v. KS am SP) (4b)

Fortan gelte (9.46):

$$T \overset{(9.3)}{=} \overset{(a)}{\frac{1}{2} M \vec{v}_0^{\,2}} + \overset{(b)}{\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{M} m_\nu (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)^2} \quad (1)$$

$$= \quad (2)$$

Kinetische Energie des SP , der Rotationsbewegung

SK10

Körperfestes KS habe Koordinaten (x_1, x_2, x_3) bezüglich $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, und

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \qquad \vec{r}_\nu = (r_1^\nu, r_2^\nu, r_3^\nu) .$$

Vektoridentität:

$$(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = (\vec{\omega}^{\,2})(\vec{r}^{\,2}) - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 \quad (3)$$

$$\left[\text{Beweis: } \sum_{i=1}^{3} (\vec{\omega} \times \vec{r})_i (\vec{\omega} \times \vec{r})_i = \sum_{ijkmn} (\varepsilon_{ijk} \omega_j r_k)(\varepsilon_{imn} \omega_m r_n) \right] \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = [\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}]$$

$$= \quad (5)$$

SK11

Kinetische Energie der Rotation:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)^2 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j \qquad \omega_m \quad (2)$$

"Trägheits-Tensor"

$$\boxed{T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j \, \Theta_{jm} \, \omega_m} \quad (3)$$

enthält Information über {Drehbewegung, Massenverteilung}

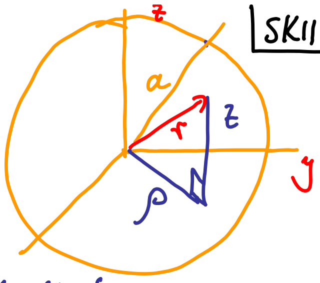
In Matrix-Notation:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Trägheitstensor für kontinuierliche Massenverteilung:

$$\boxed{\Theta_{jm} = \qquad } \quad (5)$$

Beispiel: Trägheitstensor einer Kugel v. Radius a: SK11a



$\Theta_{im} =$ (1)

Nichtdiagonal elemente: $\Theta_{im} = 0$ falls $i \neq m$ Zylindrische Koordinaten

$r^2 = \rho^2 + z^2$

$\rho = \sqrt{r^2 - z^2}$

Diagonalelemente:

$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33}$:

$i =$, $m =$, $r_i =$

$r_m =$

$\Theta_{33} =$

$= 2\pi \rho_D \int_{-a}^{a} dz$ $\pi \rho_D \int_0^a dz$

$1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$

$= \frac{15 - 10 + 3}{15} = \frac{8}{15}$

$= \pi \rho_D \{ a^4 \cdot a - 2a^2 \frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{5} a^5 \} = \frac{8}{15} \pi \rho_D a^5$

$\rho_D = \frac{M}{4\pi a^3/3}$

$$\boxed{= \frac{2}{5} M a^2}$$