

Virialsatz: "Nachtrag" zur Newtonschen Mechanik (keine Zwangskräfte) [L 90]
Gelegentlich/häufig ist die Lösung von Systemen mit vielen Freiheitsgraden schwierig bis unmöglich. Nützliche Information kann dann der Virialsatz liefern.

Def. Zeitlicher Mittelwert einer Größe: $\bar{O} := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \quad O(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t), \dot{\vec{r}}_1(t), \dots, \dot{\vec{r}}_N(t))$ (1)
↑
z.B. T oder U

Satz (Virialsatz): Falls alle $\vec{r}_i$ und $\dot{\vec{r}}_i$ im Verlauf der Zeit endlich bleiben, gilt:

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \overline{\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i} \quad (2)$$

↑
 z.B. für Planeten auf Ellipsen, oder Gasteilchen im Behälter

Beweis:

$$\bar{T} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau T dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \int_0^\tau \dot{\vec{r}}_i^2 dt \quad (3)$$

part. Integration

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\underbrace{\vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \Big|_0^\tau}_{\substack{\text{endlich} \\ \rightarrow 0 \text{ wenn } \tau \rightarrow \infty}} - \int_0^\tau \underbrace{\vec{r}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i}_{\vec{F}_i / m_i} dt \right] \quad (4)$$

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \overline{\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i} = (2) \quad \checkmark \quad \square \quad (5)$$

Lemma: Für Potentialkräfte mit einem Potential, das eine homogene Funktion [L 91]
 n -ten Grades ist,

besagt der Virialsatz:

$$V(\lambda \vec{r}_1, \dots, \lambda \vec{r}_N) = \lambda^n V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \quad (1)$$

z.B.: $V = \sum_{i,j}^N \frac{V_0}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^\alpha}$

$$2\bar{T} = n\bar{V} \quad (2) \quad n = -\alpha$$

Beweis: Für homogene Funktionen gilt:

einerseits: (1)_R $\rightarrow n \lambda^{n-1} V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \quad (3a)$

andererseits: (1)_L $\rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{\partial V(\lambda \vec{r}_1, \dots, \lambda \vec{r}_N)}{\partial (\lambda \vec{r}_i)} \cdot \underbrace{\frac{\partial (\lambda \vec{r}_i)}{\partial \lambda}}_{=\vec{r}_i} \quad (3b)$

(3a) = (3b)

Einsetzen: $\lambda = 1$:

$$n \lambda^{n-1} V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{r}_i \quad (4)$$

Wow!

Spezielle für Virialsatz:

$$\overset{(90.5)}{2\bar{T}} = \sum_{i=1}^N \overline{\vec{r}_i \cdot (-\vec{F}_i)} = \sum_{i=1}^N \overline{\vec{r}_i \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}} \overset{(4)}{=} n\bar{V} \quad (5) \quad \square$$

= (2) $\checkmark$

Beispiele:

(i) Harmonischer Oszillator: $V = \frac{1}{2} k (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$ (q.5) L92
 $n = 2 \Rightarrow \overline{T} = \overline{V}$ (1)

Energieerhaltung gilt immer:

$$\overline{T + V} = E \quad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{T} = \overline{V} = \frac{E}{2} \quad (3)$$

(ii) Kepler-Problem: $V = \frac{V_0}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ $n = -1 \Rightarrow \overline{T} = -\frac{1}{2} \overline{V}$ (q.5) (4)

(4), (2) $\Rightarrow$

$$\overline{T} = -E, \quad \overline{V} = 2E \quad (5)$$

Bemerkung: Ein Satellit, der durch Reibung Energie verliert (E wird negativer), gewinnt an kinetischer Energie (fliegt schneller)!

Starrer Körper (SK) (Fließbach, Kap. 19)

21.6.07

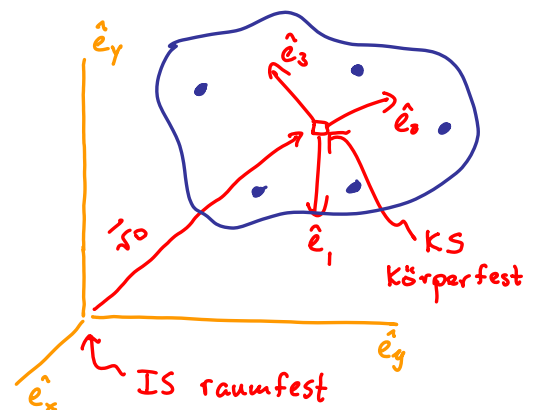
L SK1

Def. SK = System v. Massenpunkten m_i , deren Abstände $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ konstant sind.

Zur Beschreibung benötigt:

Raumfestes IS: $x, y, z; \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$

Körperfestes KS: $x_1, x_2, x_3; \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$



SK hat 6 Freiheitsgrade: (3) Koordinaten für Ursprung v. KS relativ zu Ursprung eines IS

(3) Winkel für Orientierung v.

3 Körperfesten Achsen v. KS ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$) rel. zu

3 raumfesten Achsen eines IS ($\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$)

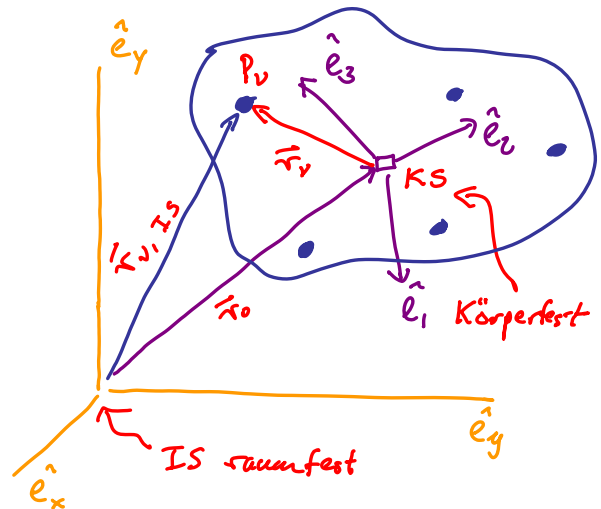
Def: Kreisel ist ein SK, bei dessen Bewegung ein Punkt festgehalten wird (nur Winkelfreiheitsgrade)

SK2

Es sei:

$\vec{r}_0(t)$ Ortsvektor, $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0(t)$ Geschw. des Ursprungs v. KS rel zum Ursprung v. IS.

$\vec{r}_v$ } die Koordinaten eines Punktes P_v in $\left\{ \begin{array}{l} KS \\ IS \end{array} \right.$
 $\vec{r}_{v,IS}$ }



KS rotiert mit Winkelgeschw. relativ zu IS: $\vec{\omega}$

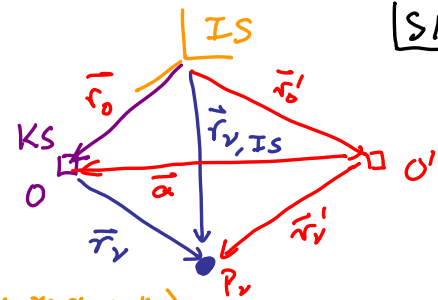
$$\dot{\hat{e}}_i = \vec{\omega} \times \hat{e}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$\vec{r}_{v,IS}(t) = \vec{r}_0 + \vec{r}_v \quad (1)$$

$$\dot{\vec{r}}_{v,IS}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}_{v,IS} = \vec{v}_0 + (\dot{\vec{r}}_v + \vec{\omega} \times \vec{r}_v) \quad (2)$$

Zeitableitung
bezieht sich auf's IS;
also auf x, y, z .

(Ableitung bez. Koord. x_1, x_2, x_3 in KS)
 $\hookrightarrow = 0$ in einem SK, denn alle Punkte ruhen bezüglich KS



SK3

$\Rightarrow$

$$\vec{v}_{v,IS}^{(2)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_v \quad (3)$$

Falls Ursprung v. KS bei O' ($\vec{r}_0'$) gewählt wird.

$$\vec{r}_0' = \vec{r}_0 - \vec{a}, \quad \vec{r}_v' = \vec{a} + \vec{r}_v, \quad (4)$$

Analog zu (3):

$$\vec{v}_{v,IS} = \vec{v}_0' + \vec{\omega}' \times \vec{r}_v' \quad (5)$$

(3) = (5) ;
gilt für alle v

$$\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_v = \vec{v}_0' + \vec{\omega}' \times \vec{a} + \vec{\omega}' \times \vec{r}_v \quad (6)$$

(3.6) gilt für
alle $\vec{r}_v \in \{SK\} \Rightarrow$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}' \quad (1)$$

$$\vec{v}_0' = \vec{v}_0 - \vec{\omega} \times \vec{a} \quad (2)$$

SK4

(2): Geschw. $\vec{v}_0'$ ist abhängig v. Wahl des KS.

(1): Winkelgeschw. ist unabhängig v. Wahl des KS !!
(Charakterisiert Drehbewegung an sich)

Fazit: 0 darf nach Belieben/Zweckmässigkeit gewählt werden.

Addition v. Winkelgeschw.:

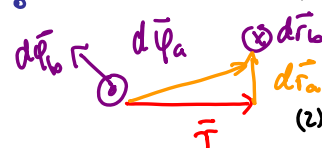
SK5

Warum lassen sich Winkelgeschw. addieren wie Vektoren? $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$

Betrachte 2 aufeinander
folgende Drehungen:

$$d\vec{\varphi}_a = \vec{\omega}_a dt \quad \text{und} \quad d\vec{\varphi}_b = \vec{\omega}_b dt$$

$$d\vec{\varphi}_a \text{ angewandt auf } \vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}_a, \quad d\vec{r}_a = d\vec{\varphi}_a \times \vec{r}$$



$$d\vec{\varphi}_b \text{ angewandt auf } \vec{r} + d\vec{r}_a \rightarrow (\vec{r} + d\vec{r}_a) + d\vec{r}_b, \quad d\vec{r}_b = d\vec{\varphi}_b \times (\vec{r} + d\vec{r}_a)$$

$$\text{ignoriere } (d\vec{\varphi}_b \times d\vec{r}_a) \quad \approx \quad d\vec{\varphi}_b \times \vec{r} \quad (3)$$

$$\text{Insgesamt: } \vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}, \quad \text{mit} \quad d\vec{r} = d\vec{r}_a + d\vec{r}_b$$

$$\text{Infinitesimale Drehgn. sind offenbar vertauschbar} \quad = \quad (d\vec{\varphi}_a + d\vec{\varphi}_b) \times \vec{r} \quad (4)$$

(endliche nicht!)

$$\text{Fazit: Gleichzeitiges Drehen mit } \vec{\omega}_a \text{ und } \vec{\omega}_b \text{ liefert} \quad = \quad \underbrace{(\vec{\omega}_a + \vec{\omega}_b)}_{\vec{\omega}} dt \times \vec{r}$$

Gesamtwinkelgeschw.

Euler'sche Winkel (EW) Wie dreht man $\begin{matrix} \hat{e}_z \\ \hat{e}_x \end{matrix} / \begin{matrix} \hat{e}_y \end{matrix}$ auf $\begin{matrix} \hat{e}_3 \\ \hat{e}_1 \end{matrix} / \begin{matrix} \hat{e}_2 \end{matrix}$?? SK6

1) ϕ -Drehung
um $\hat{e}_z$:

$$\begin{matrix} \hat{e}_x & \perp & \hat{e}_y & \perp & \hat{e}_z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{matrix}$$

$\left[\begin{matrix} \phi: \text{Winkel zwischen} \\ \hat{e}_x \text{ und } \hat{e}_k \end{matrix} \right]$

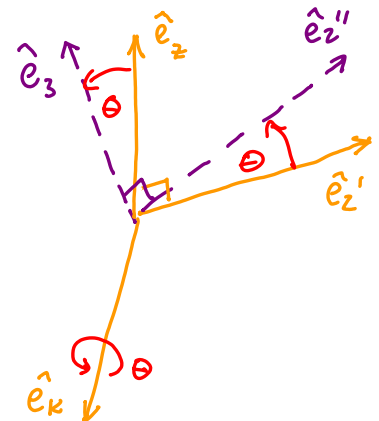
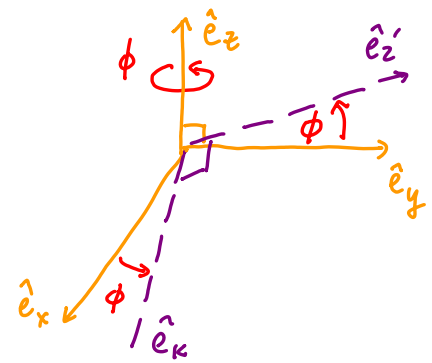
$$\hat{e}_k \perp \hat{e}_2 \perp \hat{e}_z$$

2) θ -Drehung
um $\hat{e}_k$:

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{matrix}$$

$\left[\begin{matrix} \theta: \text{Winkel zwischen} \\ \hat{e}_z \text{ und } \hat{e}_3 \end{matrix} \right]$

$$\hat{e}_k \perp \hat{e}_2'' \perp \hat{e}_3$$



3) ψ -Drehung
um $\hat{e}_3$:

$\left[\begin{matrix} \psi: \text{Winkel zwischen} \\ \hat{e}_k \text{ und } \hat{e}_1 \end{matrix} \right]$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{e}_1 & \perp & \hat{e}_2 & \perp & \hat{e}_3 \end{matrix}$$

Also: $\hat{e}_z^{(2)} =$

$$\cos \theta \hat{e}_3 + \sin \theta \hat{e}_2'' \quad (1a)$$

$\hat{e}_2''^{(3)} =$

$$\cos \psi \hat{e}_2 + \sin \psi \hat{e}_1 \quad (1b)$$

$\hat{e}_k^{(3)} =$

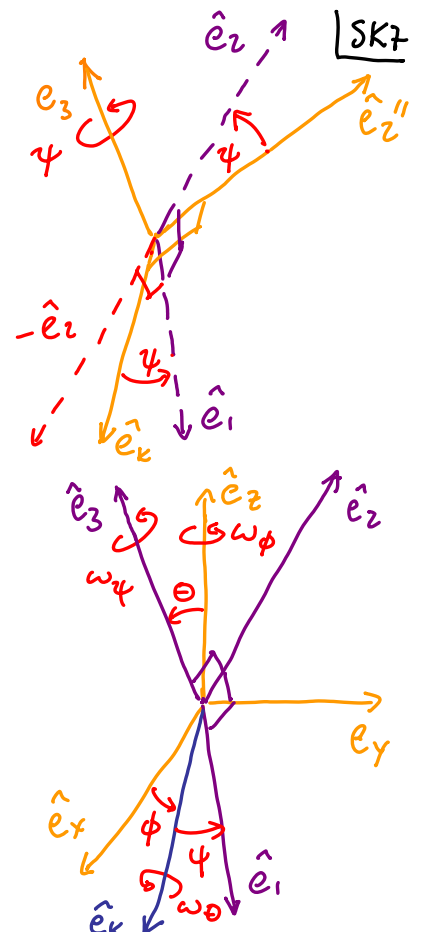
$$\cos \psi \hat{e}_1 - \sin \psi \hat{e}_2 \quad (1c)$$

Netto Eulergebnis:
Winkeländerungen
pro dt definieren
Winkelgeschwindigkeiten:
(WS)

$$\vec{\omega}_\phi^{(1)} = \dot{\phi} \hat{e}_z \quad (2a)$$

$$\vec{\omega}_\theta^{(2)} = \dot{\theta} \hat{e}_k \quad (2b)$$

$$\vec{\omega}_\psi^{(3)} = \dot{\psi} \hat{e}_3 \quad (2c)$$



Gesamt Wg: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_\phi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi \stackrel{(7.7)}{=} \dot{\phi} \hat{e}_z + \dot{\theta} \hat{e}_\kappa + \dot{\psi} \hat{e}_3$

SK8
(1)

Wg nach Komponenten $\vec{\omega} = \omega_x \hat{e}_x + \omega_y \hat{e}_y + \omega_z \hat{e}_z := (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ in IS (2a)

$\vec{\omega} = \sum_i \omega_i \hat{e}_i = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3 := (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ in KS (2b)

z.B.: $\omega_i = \hat{e}_i \cdot \vec{\omega} \stackrel{(1)}{=} \hat{e}_i \cdot (\dot{\phi} \hat{e}_z + \dot{\theta} \hat{e}_\kappa + \dot{\psi} \hat{e}_3)$ (3)

$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_z \stackrel{(7.1a)}{=} \hat{e}_1 \cdot (\cos \theta \hat{e}_3 + \sin \theta \hat{e}_z^*)$
 $\stackrel{(7.1b)}{=} \sin \theta \hat{e}_1 \cdot (\cos \psi \hat{e}_2 + \sin \psi \hat{e}_1)$
 $= \sin \theta \sin \psi$

$\omega_1 = \hat{e}_1 \cdot \vec{\omega} = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi + 0$ (4a)

$\omega_2 = \hat{e}_2 \cdot \vec{\omega} = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$ (4b)

$\omega_3 = \hat{e}_3 \cdot \vec{\omega} = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$ (4c)

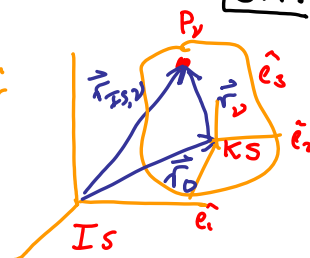
Nun kennen wir Wg
als Funktion von
 ϕ, θ, ψ und $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$

Trägheitstensor eines SK (Fließbach, Kap. 20)

SK9

$\vec{r}_{IS,v} = \vec{r}_0 + \vec{r}_v$, (1a) $\vec{v}_{IS,v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_v$ (1b)

$\dot{\vec{r}}_v = 0$ für starren Körper



Kinetische Energie: $2T = \sum_{v=1}^N m_v \vec{v}_{IS,v}^2$ (2)

$\stackrel{(1)}{=} \underbrace{\sum_{v=1}^N m_v}_M \left[\underbrace{\vec{v}_0^2}_{(a)} + \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}_v)^2}_{(b)} + 2 \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r}_v) \cdot \vec{v}_0}_{(c)} \right]$ (3)

Term (c):

$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A}$
 $= (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$

$= 2 \sum_v m_v (\vec{\omega} \times \vec{r}_v) \cdot \vec{v}_0 = (\vec{v}_0 \times \vec{\omega}) \cdot 2 \sum_v m_v \vec{r}_v$
 $= 0$, falls entweder $\vec{v}_0 = 0$ ($\vec{r}_0$ ruht), oder $\vec{r}_s = 0$ (Ursprung v. KS am sp) (4a)

(4b)

Fortan gelte (9.46):

$$T = \frac{1}{2} M \bar{\omega}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^M m_{\nu} (\bar{\omega} \times \bar{r}_{\nu})^2$$

$$= T_{\text{transl}} + T_{\text{rot}}$$

SK10
(1)

Kinetische Energie des SP, der Rotationsbewegung

(2)

Körperfestes KS habe Koordinaten (x_1, x_2, x_3) bezüglich $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, und

$$\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \bar{r}_{\nu} = (r_1^{\nu}, r_2^{\nu}, r_3^{\nu})$$

Vektoridentität:

$$(\bar{\omega} \times \bar{r})^2 = (\bar{\omega}^2)(\bar{r}^2) - (\bar{\omega} \cdot \bar{r})^2 \quad (3)$$

$$\left[\text{Beweis: } \sum_{i=1}^3 (\bar{\omega} \times \bar{r})_i (\bar{\omega} \times \bar{r})_i = \sum_{ijkmn} (\epsilon_{ijk} \omega_j r_n) (\epsilon_{imn} \omega_m r_n) \right] \quad (4)$$

$$= \sum_{jm} \omega_j \omega_m \left(\bar{r}^2 \delta_{jm} - r_j r_m \right) \quad (5)$$

Kinetische Energie der Rotation:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^M m_{\nu} (\bar{\omega} \times \bar{r}_{\nu})^2$$

(1) SK11

$$\stackrel{(10.3,5)}{=} \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j \underbrace{\sum_{\nu} m_{\nu} \left[(\bar{r}^2) \delta_{jm} - r_j^{\nu} r_m^{\nu} \right]}_{I_{jm} \equiv \Theta_{jm} = \Theta_{jm} \text{ "Trägheits-Tensor" (v. Rang 2)}} \omega_m \quad (2)$$

$I_{jm} \equiv \Theta_{jm} = \Theta_{jm}$ "Trägheits-Tensor" (v. Rang 2)

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j \Theta_{jm} \omega_m$$

{Drehbewegung
enthält Information über Massenverteilung}

(3)

In Matrix-Notation:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

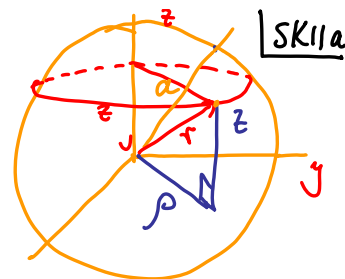
Trägheitstensor für kontinuierliche Massenverteilung:

$$\Theta_{jm} = \int d\vec{r} \rho_0(\vec{r}) \left[\bar{r}^2 \delta_{jm} - r_j r_m \right] \quad (5)$$

Beispiel: Trägheitstensor einer Kugel v. Radius a :

$$\Theta_{im} = \int d\tau dy dz \underbrace{\rho_D(r)}_{\rho_D} [r^2 \delta_{im} - r_i r_m] \quad (1)$$

$(r < a)$



Nichtdiagonal
elemente:

$\Theta_{im} = 0$ falls $i \neq m$ Zylindrische Koordinaten

z.B. $i=1, m=2$: $\int dx x \int dy y = 0$

$$r^2 = \rho^2 + z^2$$

$$\rho = \sqrt{r^2 - z^2}$$

Diagonalelemente:

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33}:$$

$$i = , m = , r_i = r_m =$$

$$1 - \frac{z}{3} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{15 - 10 + 3}{15} = \frac{8}{15}$$

$$\rho_D = \frac{M}{4\pi a^3/3} = \frac{M}{V_{\text{Vol}}}$$

symmetrisches Intervall r^2 in Zylinderkoordinat

$$\Theta_{33} = \int_{-a}^a dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} d\rho \rho \rho_D [\rho^2 + z^2 - z^2]$$

$$= 2\pi \rho_D \int_{-a}^a dz \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} = 2\pi \rho_D \int_{-a}^a dz \sqrt{a^2 - z^2}^4$$

$$= \pi \rho_D \left\{ a \cdot a - 2a^2 \frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{5} a^5 \right\} = \frac{8}{15} \pi \rho_D a^5$$

$$= \frac{2}{5} M a^2$$

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33}$$

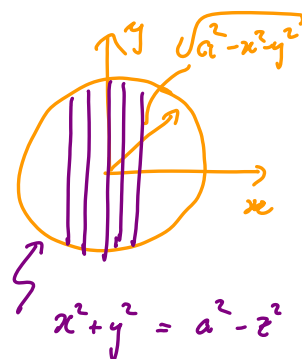
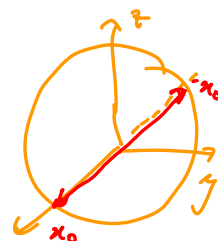
Zwischenrechnung für z , und y :

Cartesisch:

$$\int_{-a}^a dz \int_{-y_0}^{y_0} \int_{-x_0}^{x_0} dx x = 0$$

$$x_0 = \sqrt{a^2 - z^2 - y^2}$$

$$y_0 = \sqrt{a^2 - z^2}$$



Kugelkoordinat:

$$\int_0^a d\tau \tau^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta$$

$x y$

$$(\tau \sin\theta \sin\phi)(\tau \sin\theta \cos\phi) = 0.$$

$$\int d\tau^3 = \int d\tau dy dz$$