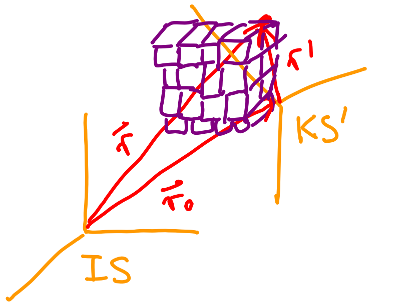
Kinetische Energie einer kontinuierlichen Massenverteilung

v20 25.6.07 SK12



Satz: Es gilt wieder: (vergleiche 10.2)

$$T = T_{trans} + T_{rot} \tag{1}$$

Beweis:

$$T = \frac{1}{2}\int d^3r\, \rho_D(\vec{r})\, \vec{v}^{\,2}(\vec{r}) \tag{2}$$

$\vec{v}(\vec{r}) :=$ Geschw. eines Volumenelements bei $\vec{r}$, bezüglich Ursprung v. IS.

Analog zu (3.1), (3.3):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,', \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}\,' \tag{3}$$

(3) in (2):

$$T = \frac{1}{2}\int d^3r'\, \rho_D(\vec{r}\,'+\vec{r}_0)\left[\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right]^2 \tag{4}$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3r'\, \rho'_D(\vec{r}\,')\left[\dot{\vec{r}}_0^{\,2} + \underbrace{2\dot{\vec{r}}_0\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')}_{=0} + (\vec{\omega}\times\vec{r}\,')^2\right] \tag{5}$$

Wähle Ursprung v. KS' im Schwerpunkt, $\Rightarrow$ $\int d^3r'\rho(\vec{r}\,')\,\vec{r}\,' = 0$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_0^{\,2}}_{T_{transl.}} + 0 + \underbrace{\frac{1}{2}\int d^3r'\, \rho'_D(\vec{r}\,')\left[\vec{\omega}^{\,2}\cdot\vec{r}\,'^{\,2} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,')^2\right]}_{\frac{1}{2}\sum_{jm}\omega_j\,\Theta_{jm}\,\omega_m} \tag{6}$$

(7)

SK13

Bemerkung: Die ω_i in (12.5) sind die Projektionen der Winkelgeschwindigkeiten auf die Koordinatenachsen des körperfesten Bezugsystems.

Def: Unter Drehungen, $\vec{r} \to \vec{r}\,' = \hat{R}\,\vec{r}$ (Drehmatrix) $\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}$ (1)

transformiert sich

(i) ein "Tensor 0. Stufe" (= Skalar) wie $S \to S' = S$ (invariant) (2)

(ii) ein "Tensor 1. Stufe" (= Vektor) wie $\vec{A} \to \vec{A}\,' = \hat{R}\vec{A}$ (also "wie Ortsvektor") (3)

(iii) ein "Tensor 2. Stufe" wie $I \to I' = \hat{R}\, I\, \hat{R}^T$ (4)

Indizes explizit: $A_i \to A_i' \overset{(3)}{=} R_{ij}A_j$, $I_{ij} \to I'_{ij} \overset{(4)}{=} R_{im}\, I_{mn}\, R^T_{nj}$ (4)

[Einsteinsche Konv.]

$\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}^T$

$\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}(\cdot\;\cdot\;\cdot)$ $\qquad$ $\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}(\cdot\;\cdot\;\cdot)$

Eselsbrücke: Tensor 2.te Stufe verhält sich wie ein "Äußeres Produkt" zweier Vektoren, also "Spaltenvektor × Reihenvektor"

Satz: Trägheitstensor verhält sich unter Drehungen wie ein Tensor 2.ter Stufe

Beweis: laut Def.:

$\vec{r}\,' \overset{(13.1)}{=} \hat{R}\,\vec{r}$

$$\Theta'_{ij} \overset{(11.5)}{=} \int d^3r' \, \rho'_D(\vec{r}\,') \left[\underbrace{\vec{r}\,'^2}_{(13.2)} \delta_{ij} - \underbrace{r'_i r'_j}_{(13.1)} \right] \tag{1}$$

$$= \int d^3r \, \rho_D(\vec{r}) \left[\vec{r}^{\,2} \delta_{ij} - \sum_{mn} R_{im} r_m R_{jn} r_n \right] \tag{2}$$

Volumenelement unverändert

Länge = Skalar, unverändert

$R_{im} R^T_{mj} = \delta_{ij}$

$$= \sum_{mn} R_{im} \underbrace{\left[\int d^3r \, \rho_D(\vec{r}) \left[\vec{r}^{\,2} \delta_{mn} - r_m r_n \right] \right]}_{\Theta_{mn}} R^T_{nj} \tag{3}$$

R, R^{+} sind Ortsunabhängig, können aus Integral ausgeklammert werden

$$= \sum_{mn} R_{im} \Theta_{mn} R^T_{nj} \quad , \text{ also wie Tensor 2. Stufe, (siehe (13.4))} \tag{4}$$

□

Offenbar hängt vorm von Θ von Wahl des Koordinatensystems ab – es ändert sich unter Drehungen!

Vereinfachungen bei Berechnung von Θ sind möglich:

1. Vereinfachung: Wähle Ursprung von KS im Schwerpunkt ✓

2. Vereinfachung: **Satz:** Es gibt ein Koordinatensystem KS, in dem der Trägheitstensor diagonalform hat:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Bemerkung: Man bezeichnet die Transformation zu diesem KS als "Hauptachsentransf.", das entsprechende KS als "Hauptträgheitsachsensystem", und die Diagonalelemente als "Hauptträgheitsmomente".

Beweis: Θ ist reelle, symmetrische 3x3 Matrix: $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$ (2)

Aus linearen Algebra bekannt: $\Rightarrow$ Es existiert eine orthogonale Transf., die Θ diagonalisiert.

$$\Theta_{diag} = \hat{R}\,\Theta\,\hat{R}^T \tag{3}$$

Die orthogonale Transf. $\hat{R}$ wird dann gerade als Drehung interpretiert. □

SK16

Bemerkung:

Die allgemeine Form
$$\Theta_{ij} = \int_D d^3r\, \rho(\vec r)\left(\vec r^{\,2}\, \delta_{ij} - r_i r_j\right) \qquad (1)$$

vereinfacht sich in Hauptachsenbasis zu:
$$\Theta = \Theta_x = \int dx\,dy\,dz\, \rho_D(\vec r)\left[(x^2+y^2+z^2)\,\delta_{11} - x\,x\right]$$
$$= \int dx\,dy\,dz\, \rho_D(\vec r)\,(y^2+z^2) \qquad (2a)$$

$$\Theta_y = \int dx\,dy\,dz\, \rho_D(\vec r)\,(z^2+x^2) \qquad (2b)$$

$$\Theta_z = \int dx\,dy\,dz\, \rho_D(\vec r)\,(x^2+y^2) \qquad (2c)$$

SK17

Erinnerung (lineare Algebra): Das Auffinden der Hauptträgheitsmomente ist gerade die Bestimmung der Eigenwerte der Matrix Θ :

Suche Vektoren $\vec a_i$, mit $\underbrace{\Theta}_{\text{Matrix}}\, \vec a_i = \underbrace{\Theta_i}_{\text{Skalar}}\, \vec a_i$ $\qquad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \qquad (1)$

Dies ist äquivalent zum Finden der Nullstellen von $\det[\Theta - \lambda \underbrace{\mathbb{1}}_{\text{Einheitsmatrix}}] = 0 \qquad (2)$

Jede Lösung λ ist eines der Hauptträgheitsmomente Θ_i.

Beachte, daß man die $\vec a_i$ normiert und orthogonal wählen kann (diese Wahl ist nur eindeutig, falls $\Theta_1 \neq \Theta_2 \neq \Theta_3$).

Bezeichnungen:

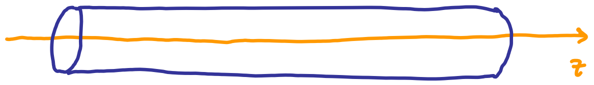
"unsymmetrischer Kreisel", falls: $\Theta_1 \neq \Theta_2$, $\Theta_2 \neq \Theta_3$, $\Theta_3 \neq \Theta_1$

"symmetrischer Kreisel," falls : $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$ $\qquad (3)$

"Kugelkreisel", falls: : $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$

Satz: Ist ein starrer Körper rotationssymmetrisch, liegt der Schwerpunkt auf dieser Achse und der Körper ist ein symmetrischer Kreisel. SK18

Beispiel: Zylinder



Drehachse

Beweis: Wähle z-Achse entlang Symmetrieachse.

Rotationssymmetrie bedeutet:
$$\rho = \rho(x^2+y^2,\ z) \tag{1}$$

Folglich gilt
$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} = \int dx\,dy\,dz\ \rho_D(x^2+y^2,\ z) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

$\{\ \}$: Kurznotation für 3 getrennte Gleichungen.

Also liegt Schwerpunkt auf z-Achse:
$$R_S = (0,\ 0,\ z_1) \tag{3}$$

SK19

Trägheitstensor:
$$\Theta_{xx} = \int dx\,dy\,dz\ \rho_D(x^2+y^2,\ z)\ \big(\underbrace{x^2+y^2+z^2-x^2}_{y^2+z^2}\big) \tag{1}$$

Umbenennung der Integrationsvariablen:
$$\overset{x\leftrightarrow y}{=} \int dy \int dx \int dz\ \rho_D\big(\underbrace{y^2+x^2,\ z}_{\rho_D(x^2+y^2,\ z)}\big)\ \big(\underbrace{x^2+z^2}_{(x^2+y^2+z^2-y^2)}\big) \tag{2}$$
$$= \Theta_{yy} =: \Theta_1$$

$$\Theta_{xy} \overset{(16.2a)}{=} \int dx\,dy\,dz\ \rho_D(x^2+y^2,\ z)\ (0 - xy) = 0 \tag{3}$$

folgt aus $x \to -x$ oder $y \to -y$

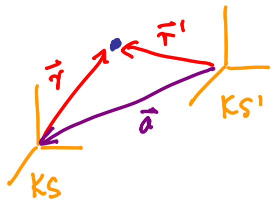
Analog:
$$\Theta_{yz} = 0 \tag{4a}$$
$$\Theta_{zx} = 0 \tag{4b}$$

Folglich:
$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{zz} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Bemerkung: Die Hauptträgheitsachsen fallen mit den Symmetrieachsen des starren Körpers zusammen.

Satz von Steiner

Sei Θ der Trägheitstensor, berechnet bezüglich des Schwerpunkts in KS.
Sei KS' ein zu KS achsenparalleles Koordinatensystem, das um einen Vektor $\vec{a}$ verschoben ist. Dann gilt für Trägheitstensoren bezüglich KS':



$$\Theta'_{ij} = \Theta_{ij} + \underbrace{M}_{\text{Gesamtmasse}}\left(\vec{a}^{\,2}\,\delta_{ij} - a_i a_j\right) \qquad (1)$$

Beweis:

$$\Theta'_{ij} = \int d^3r'\,\rho'_D(\vec{r}\,')\left[\vec{r}\,'^2\,\delta_{ij} - r'_i r'_j\right] \qquad (2)$$

$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{a}$

$$= \int d^3r\,\underbrace{\rho'_D(\vec{r}+\vec{a})}_{\rho_D(\vec{r})}\left[(\vec{r}+\vec{a})^2\,\delta_{ij} - (r_i+a_i)(r_j+a_j)\right]$$

$$= \int d^3r\,\rho_D(\vec{r})\Big[\left(\vec{r}^{\,2}\,\delta_{ij} - r_i r_j\right) \to \Theta_{ij}$$
$$+\left(2\,\vec{a}\cdot\vec{r}\,\delta_{ij} - a_i r_j - r_i a_j\right) \to 0 \qquad (3)$$
$$+\left(\vec{a}^{\,2}\,\delta_{ij} - a_i a_j\right)\Big]$$

Terme linear in r liefern, da Ursprung von KS im Schwerpunkt liegt.

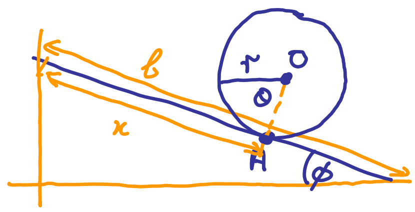
□

Wiederholung: rollender Reifen auf schiefer Ebene.

Auf Seite L76 wurde angegeben: $\frac{1}{2} I \omega^2$

Kinetische Energie $T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M r^2\right)\dot{\theta}^2$

Potenzielle Energie: $V = Mg(\ell - x)\sin\phi$



(1)

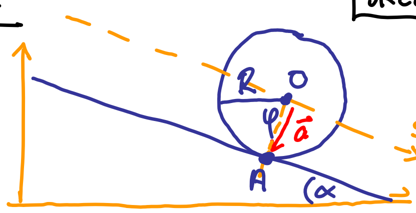
Für die Aufstellung von T wurde der Punkt O als Ursprung des körperfesten Koordinatensystems gewählt. Die Angabe $T_{rot} = \frac{1}{2}\omega_i \Theta_{ij} \omega_j$ bezieht sich auf Rotation um die Rotationssymmetrieachse O. Da dieser Punkt O sich selbst bewegt, ist zusätzlich ein Term $T_{transl.} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$ erforderlich.

(eines Inertialsystems IS' gewählt werden, dessen Ursprung zum Zeitpunkt t am Berührungspunkt liegt.

Alternativ kann auch A als Ursprung des körperfesten ~~Systems gewählt werden~~.
Die momentane Geschw. von A ist null (kein Rutschen), deshalb ist $T_{transl} = 0$

Aber, für T_{rot} muss Trägheitsmoment dann nicht bezüglich O, sondern bezüglich A berechnet werden!

Alternative Behandlung des rollenden Zylinders auf schiefer Ebene



Zylinderlänge: ℓ

Lagrange-Funktion: $$L = T - V$$
$$= T - Mg(-s)\sin\alpha \qquad (1)$$

Kinetischen Energie: $$T = \tfrac{1}{2}\,\omega_i\,\Theta'_{ij}\,\omega_j$$

Trägheitstensor bezüglich A.

a) Gesamtmasse: $$M = \int dx\,dy\,dz\;\rho(x^2+y^2, z)$$

Dichte in Zylinderkoordinaten:
$$\rho(r,\varphi,z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \le R \text{ und } z \in [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}] \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases} \qquad (2)$$

[Formale Notation: $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \forall\, x > 0 \\ 0 & \forall\, x < 0 \end{cases}$

$$= \rho_0\,\Theta(R-r)\,\Theta(\ell/2 - z)\,\Theta(z+\ell/2)$$]

$$M \overset{(2)}{=} \underbrace{\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr\, r}_{\int dx\,dy\,dz}\; \rho_0 = \ell\, 2\pi\, \frac{R^2}{2}\,\rho_0 \qquad (4)$$

b) Winkelgeschwindigkeit: $$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{z} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix} \qquad (1)$$

(egal ob bezüglich O oder A, siehe SK4)

Nur Θ_{zz} wird benötigt: $$T_{rot} = \tfrac{1}{2}\,\omega_z^2\,\Theta'_{zz} = \tfrac{1}{2}\,\frac{\dot{s}^2}{R^2}\,\Theta'_{zz} \qquad (2)$$

$$\left[\text{denn } ds = R\,d\varphi \;\Rightarrow\; \dot{s} = R\dot{\varphi} \;\Rightarrow\; \omega_z = \dot{\varphi} = \dot{s}/R\right] \qquad (3)$$

a) Trägheitsmoment bezüglich Symmetrieachse des Zylinders, O

$$\Theta_{zz} = \int dx\,dy\,dz\;\rho(x^2+y^2, z)\,(x^2+y^2) \qquad (4)$$

$$= \underbrace{\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr\, r}_{\int dx\,dy\,dz}\; \rho_0\, \underbrace{r^2}_{x^2+y^2} = \ell\, 2\pi\,\rho_0\,\frac{R^4}{4} \overset{(22.2)}{=} \frac{1}{2} M R^2 \qquad (5)$$

SK24

a) Trägheitsmoment bezüglich Drehung um Punkt A:

Satz von Steiner: $\Theta'_{zz} = \Theta_{zz} + M(\vec{a}^2 \delta_{zz} - a_z a_z)$ (1)

mit $\vec{a} = R\hat{\rho}$ (Einheitsvektor in radialer Richtung) (2)

$\Theta'_{zz} \overset{(23.5)}{=} \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 = \frac{3}{2} M R^2$ (3)

Kinetische Energie bei Drehung um A: $T_{rot} \overset{(23.2)}{=} \frac{1}{2} \frac{\dot{s}^2}{R^2} \Theta'_{zz} \overset{(3)}{=} \frac{3}{4} M \dot{s}^2$ (4)

Lagrange-Funktion: $L \overset{(22.1)}{=} \frac{3}{4} M \dot{s}^2 + M g s \sin\alpha$ (5)

Lagrange-Gl. 2. Art: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = \frac{\partial L}{\partial s}$:

$\frac{3}{2} M \ddot{s} = M g \sin\alpha \implies g_{eff} = \frac{2}{3} g \sin\alpha$ (6)

Konsistent mit (L77.6) nach Korrektur!