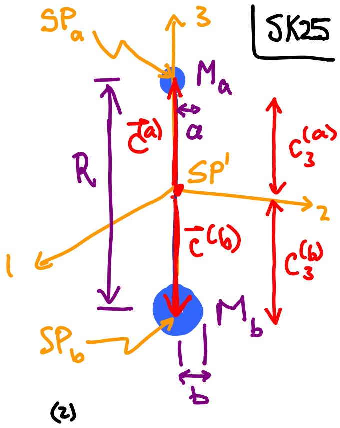
Beispiel: Hantel mit 2 Massen

V21 – 28.06.07 | SK25



Trägheitsmomente für M_a, M_b bezüglich ihrer Mittelpunkte bei SP_a, SP_b:

$$\Theta^a_{11} = \Theta^a_{22} = \Theta^a_{33} = \frac{2}{5} M_a a^2 \qquad (1)$$
$$\Theta^b_{11} = \Theta^b_{22} = \Theta^b_{33} = \frac{2}{5} M_b b^2$$

Gesamt TM bezüglich gemeinsamen SP:

$$\Theta'_{jm} \overset{(14.2)}{=} \Theta^a_{jm} + M_a\left[\left(\vec C^{(a)}\right)^2 \delta_{jm} - \vec C^{(a)}_j \cdot \vec C^{(a)}_m\right]$$
$$+\ \Theta^b_{jm} + M_b\left[\left(\vec C^{(b)}\right)^2 \delta_{jm} - \vec C^{(b)}_j \cdot \vec C^{(b)}_m\right] \qquad (2)$$

Für M_a: $C_1^{(a)} = C_2^{(b)} = 0$, $\quad C_3^{(a)} = \dfrac{M_b R}{M_a + M_b}$, (3)

Für M_b: $C_1^{(b)} = C_2^{(b)} = 0$, $\quad C_3^{(b)} = \dfrac{M_a R}{M_a + M_b}$

Symmetrie um Hantelachse

$$\Theta^S_{11} = \Theta^S_{22} \overset{(2)}{=} \frac{2}{5} M_a a^2 + M_a\left[\left(\frac{M_b R}{M_a + M_b}\right)^2 - 0\right] + \frac{2}{5} M_b b^2 + \left[M_b\left(\frac{M_a R}{M_a + M_b}\right)^2 - 0\right] \qquad (4)$$

$$\Theta^S_{33} \overset{(3)}{=} \frac{2}{5} M_a a^2 + 0 + \frac{2}{5} M_b b^2 + 0 \qquad (5)$$

Weitere Schreibweise für Rotationsenergie:

SK26

$\Theta_{jm} \equiv I_{jm}$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j I_{jm} \omega_m = \boxed{\frac{1}{2} \vec\omega \cdot \hat I \cdot \vec\omega} \qquad (1)$$

wobei

$$\boxed{\underbrace{\hat I}_{\text{"Dyade"}} \equiv \sum_{jm} I_{jm}\, \hat e_j \underbrace{\circ}_{\text{"Dyadisches Produkt"}} \hat e_m} \qquad (2)$$

Def: Dyadisches Produkt, liefert bei Skalarmultiplikation mit einem Vektor $\vec a$:

$\vec A \cdot \vec B = (\cdots)\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix} = \sum_j A_j B_j$

$$(\hat e_j \circ \hat e_m) \cdot \vec a = \vec e_j (\hat e_m \cdot \vec a), \quad \text{und} \quad \vec a \cdot (\hat e_j \circ \hat e_m) = (\vec a \cdot \hat e_j)\, \hat e_m \qquad (3)$$

$$\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix} \circ \underbrace{(\cdots) \cdot \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}_{a_m} = \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix} a_m \qquad \underbrace{(\cdots) \cdot \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}_{a_j} \circ (\cdots) = a_j (\cdots) \qquad (4)$$

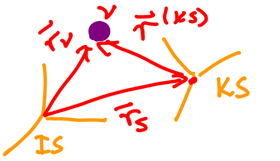
Check (1)

$$T_{rot} \overset{(1)_R}{=} \frac{1}{2} \underbrace{\vec\omega \cdot \Big(\sum_{jm} I_{jm}\, \hat e_j}_{\omega_j} \circ \underbrace{\hat e_m\Big) \cdot \vec\omega}_{\omega_m} = \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j I_{jm} \omega_m = (1)_L \checkmark \qquad (5)$$

Drehimpuls

(hängt vom Bezugspunkt ab)

Satz: Der Drehimpuls des starren Körpers bezüglich eines beliebigen Punkts kann zerlegt werden in den Drehimpuls des Schwerpunkts bzgl. dieses Punktes und den Relativdrehimpuls:



$$\boxed{\vec{L}_{tot} = M\,\vec{r}_S \times \dot{\vec{r}}_S + \underbrace{\sum_\nu m_\nu\, \vec{r}_\nu^{\,(KS)} \times \left(\frac{d\vec{r}^{\,(KS)}}{dt}\right)_{IS}}_{\vec{L}_{rel}}} \qquad (1)$$

Beweis: für jeden Massenpunkt gilt: $\vec{r}_\nu = \vec{r}_S + \vec{r}_\nu^{\,(KS)}$ (2)

Gesamtdrehimpuls: $(\vec{L}_{tot})_{IS} = \sum_\nu m_\nu\, \vec{r}_\nu \times \dot{\vec{r}}_\nu \overset{(2)}{=} \sum_\nu m_\nu \left(\vec{r}_s + \vec{r}_\nu^{\,(KS)}\right) \times \left(\dot{\vec{r}}_s + \left(\frac{d\vec{r}^{\,(KS)}}{dt}\right)_{IS}\right)$

Zeitableitung bezieht sich auf ein Inertialsystem.

$$= \underbrace{\sum_\nu m_\nu}_{M} \left[\vec{r}_s \times \dot{\vec{r}}_S + \vec{r}_s \times \left(\frac{d\vec{r}_\nu^{\,(KS)}}{dt}\right)_{IS} + \underbrace{\vec{r}_\nu^{\,(KS)}}_{=0} \times \dot{\vec{r}}_S + \vec{r}_\nu^{\,(KS)} \times \left(\frac{d\vec{r}^{\,(KS)}}{dt}\right)_{IS}\right]$$

per Definition

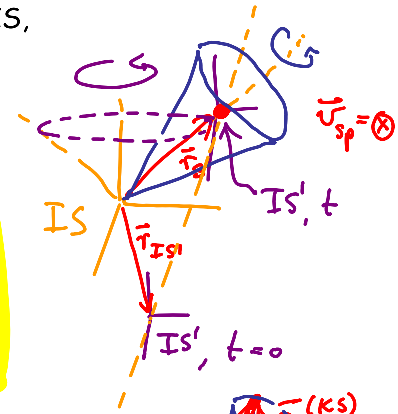
$\sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu^{\,(KS)} = M \vec{r}_s^{\,(KS)} = 0$ Schwerpunkt liegt in KS bei $\vec{r}_s^{\,(KS)} = 0$ und ruht, $\dot{\vec{r}}_s^{\,(KS)} = 0$ (4)

$\sum_\nu m_\nu \frac{d\vec{r}_\nu^{\,(KS)}}{dt} = M\dot{\vec{r}}_s^{\,(KS)} = 0$ $\quad = M\,\vec{r}_S \times \dot{\vec{r}}_S + \vec{L}_{rel}$ (5)

Im Folgenden wählen wir ein <u>Inertialsystem</u> IS' in dem der Schwerpunkt momentan ruht (SP-System) (d.h. IS' bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit bzgl. IS,

$\vec{r}_{IS'} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ (1)

so, dass zum momentanen Zeitpunkt t gilt: $\vec{r}_{IS'}(t) = \vec{r}_S(t)$, $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_S(t)$ (2)



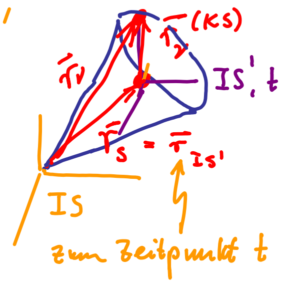
Satz:
Im SP-System IS' gilt:

Trägheitstensor

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{L} &= \hat{I}\cdot\vec{\omega}\\ L_i &= I_{im}\,\omega_m\end{aligned}} \qquad (3)$$

Beweis:
zum momentanen Zeitpunkt t gilt, aus Sicht von IS':

$$(\vec{L}_{tot})_{IS'} \overset{(26.1)}{=} M \underbrace{(\vec{r}_S)_{IS'}}_{=0} \times \underbrace{(\dot{\vec{r}}_S)_{IS'}}_{=0} + \sum_\nu m_\nu\, \vec{r}_\nu^{\,(KS)} \times \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}_\nu^{\,(KS)}}{dt}\right)_{IS'}}_{(\vec{\omega}\times\vec{r}_\nu^{\,(KS)})} \qquad (4)$$



$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

$$= \sum_\nu m_\nu \left[\vec{\omega}\left(\vec{r}_\nu^{\,(KS)}\right)^2 - \vec{r}^{\,(KS)}\left(\vec{r}^{\,(KS)}\cdot\vec{\omega}\right)\right] \qquad (5)$$

j-Komponente:

$\vec{\omega} = \sum_j \omega_j \hat{e}_j^{(KS)}$

$\vec{r}_\nu^{\,(KS)} = \sum_j r_{\nu,j}^{(KS)} \hat{e}_j^{(KS)}$

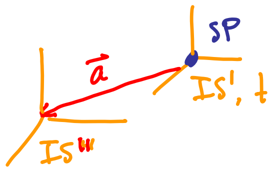
$$= \sum_{jm} \hat{e}_j^{(KS)} \underbrace{\sum_\nu m_\nu \left[\left(\vec{r}_\nu^{\,(KS)}\right)^2 \delta_{jm} - r_{\nu,j}^{(KS)}\, r_{\nu,m}^{(KS)}\right]}_{I^{(KS)}} \omega_m = \hat{I}\cdot\vec{\omega} \qquad (6)$$

□

KS29

Analog für kontinuierliche Massenverteilung.

Bemerkung: die Herleitung verläuft analog für den Drehimpuls relativ zu einem anderen Inertialsystem, IS'', (um $\vec a$ verschoben relativ zum SP), in dem ein anderer körperfester Punkt (statt des SP) momentan ruht:



$$(\vec L_{tot})_{IS''} \overset{(27.1)}{=} \sum_\nu m_\nu \, \vec r_\nu'' \times \underbrace{\left(\frac{d\vec r_\nu''}{dt}\right)_{IS''}}_{=\vec\omega\times\vec r_\nu''}$$

$$(\vec L_{tot})_{IS''} = \sum_{jm} \hat e_j \underbrace{\sum_\nu m_\nu \left[(\vec r_\nu'')^2 \delta_{jm} - r''_{\nu,j}\, r''_{\nu,m}\right]}_{I''_{jm}} \omega_m$$

I''_{jm} Trägheitstensor bezüglich IS''

Steinersche Satz:

$$= \sum_{jm} \hat e_j \left[I'_{jm} + M(\vec a^2 \delta_{jm} - a_j a_m)\right] \omega_m$$

$\downarrow$ (28.6)

$$(\vec L_{tot})_{IS''} = (\vec L_{tot})_{IS'} + M\,\vec a \times (\vec\omega\times\vec a)$$

(wie erwartet!)

Drehimpuls vom SP relativ zu IS''

K30

Drehmoment (Erinnerung):

$$\left(\frac{d\vec L}{dt}\right)_{IS} = \sum_\nu m_\nu \Big(\underbrace{\dot{\vec r}_\nu \times \dot{\vec r}_\nu}_{=0} + \vec r_\nu \times \underbrace{\ddot{\vec r}_\nu}_{\vec F_\nu/m_\nu} \Big) \tag{1}$$

$$= \sum_\nu \vec r_\nu \times \vec F_\nu = \vec M \tag{2}$$

↑ Gesamtdrehmoment

Ziel: diese Gl. im körperfesten System KS ausdrücken:

$$\vec L(t) = \sum_j L_j^{(KS)} \hat e_j^{(KS)} \tag{3}$$

← Körperfestes Bezugsystem

$$\left(\frac{d\vec L(t)}{dt}\right)_{IS} = \sum_j \underbrace{\frac{dL_j^{(KS)}}{dt}}_{\dot L_j^{(KS)}} \hat e_j^{(KS)} + L_j^{(KS)} \underbrace{\frac{d\hat e_j^{(KS)}}{dt}}_{\vec\omega \times \hat e_j^{(KS)}} \tag{4}$$

$$= \sum_j \dot L_j^{(KS)} \hat e_j^{(KS)} + \vec\omega \times \vec L \tag{5}$$

(5) in $[(2)] \cdot \hat e_j^{(KS)}$

$$M_j^{(KS)} = \dot L_j^{(KS)} + (\vec\omega\times\vec L)_j^{(KS)} \tag{6}$$

Im folgenden lassen wir immer (KS) konsistent weg, und schreiben KS31

Komponenten bezogen auf KS, d.h. $\vec{M} = \sum_j M_j \hat{e}_j^{(KS)}$, usw.

$$\vec{M}^{(KS)} := \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{L}^{(KS)} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}^{(KS)} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Im Hauptachsensystem gilt: $\hat{I}$ diagonal!

(28.7)

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{L}_j^{(KS)}: \quad \begin{pmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

da I zeitunabhängig ist! Vorteil vom Körperfesten System!!

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz: im Schwerpunkts- und Hauptachsensystem wird Bewegung es starren Körpers durch die "Eulerschen Gleichungen" beschrieben

$\omega_2 L_3 - \omega_3 L_2$

$= \omega_2 \omega_3 I_3 - \omega_3 \omega_2 I_2$

$$\boxed{\begin{aligned} M_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2 \omega_3 \quad &(3a) \\ M_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_1 \omega_3 \quad &(3b) \\ M_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_1 \omega_2 \quad &(3c) \end{aligned}}$$

(mit Komponenten von ω_j und M_j bezogen auf das körperfeste Hauptachsensystem):