Hamiltonsche Mechanik (Kanonische Mechanik)

V23 - 4.7.07

H1

Hamilton-Funktion und Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Motivation: Die Hamiltonsche Formulierung der klassischen Mechanik
- erweiterert Klasse der zulässigen koordinaten Transf. (wichtig für Diskussion v. Symmetrien)
- ist ideal für formale Diskussion der mathematischen struktur der klassischen Mechanik.
- verdeutlicht den Bezug der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik.

Zentrale Ergebnisse (Vorschau):

$(q_1, \dots, q_f)$ $(p_1, \dots, p_f)$

Def: "Hamilton-Funktion": $H(q, p, t) :=$ wobei $p_k =$ und $\dot{q}_k =$ (1)

Hamiltonschen Bewegungsgleichungen: $\dot{q} =$, $\dot{p} =$ (2)

Def: "Poisson-Klammer": $F = F(q,p,t)$, $G = G(q,p,t)$ $\{\ ,\ \} = \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \right]$ (3)

Bewegungsgl. ausgedrückt durch Poisson-Klammern: $\frac{dF}{dt} =$ (4)

Einfachstes Beispiel: freies Teilchen in konservativem Kraftfeld

H2

Lagrange-Funktion: $L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q,t)$ (1)

Kanonischer Impuls: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} =$, $\Rightarrow$ $\dot{q} = \dot{q}(q,p) =$ (2)

Hamilton-Funktion: $H(p,q) \overset{(1.1)}{=} p\dot{q} - L =$ (3)

$=$ (4)

Hamilton-Gl: $\dot{q} \overset{(1.2)}{=} \frac{\partial H}{\partial p}$; $\dot{p} \overset{(1.2)}{=} -\frac{\partial H}{\partial q}$ (5)

Poisson-Klammer für $F = q$, $G = p$: $\{\ ,\ \} \overset{(1.3)}{=} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q}$ (6)

Inschrift auf Grabstein von Max Born

Zeitentwicklung von q via Poisson-Klammern: $\frac{d}{dt} \overset{(1.4)}{=} \{\ , H\} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} =$ (7)

Allgemeine Formulierung

Verallg. Koordinaten seien: $q = (q_1, \dots, q_f)$, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ (1)

Kanonischen Impulse: $p = (p_1, \dots, p_f)$, mit $p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}$ (2)

Ziel: ein Formalismus, dessen Variablen nicht sondern sind!

Def: Hamilton-Funktion (engl: Hamiltonian):
Ein System, das durch eine Langrange-Funktion mit (3)

beschrieben wird, heisst "kanonisch". Ein kanonisches System hat eine sog. Hamiltonfunktion.

$$H(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f, t) := \tag{4}$$

Vektoren, wie in (1)

Die unahbängigen Variablen der Hamilton-Funktion sind:
- die generalisierten Koordinaten (5)
- die generalisierten Impulse ("kanonisch konjugierten Impulse")

(6)

- "p und q sind unabhängige Variablen" bedeutet:

Bemerkung: (4) ist eine Legendre-Transformation von L zu H, wodurch die durch als unabhängige Variable ersetzt wird. Wozu die Einschränkung (3.3)?

Um H = (1) zu konstruieren muss sich eindeutig als ausdrücken lassen. (1)

(2)

Anders gesagt, muss sich nach den auflösen lassen.

Nach dem Satz über invertierbare Funktionen ist dies genau dann möglich, wenn die Matrix

$M_{kj} =$ invertierbar ist, d.h. (3)

invertierbar ist, das System also kanonisch ist. Plausibilitätsarg. für diesen Satz:

(4)

Betrachte die Funktionen $p_k = f_k(q, \dot{q}, t)$, $k = 1, \dots, f$

Taylor-Entw. nach 2.tem Argument: = (5)

Betrachte Limes $\dot{q}_k \to 0$: $\Rightarrow$ $\sum_j \left[\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j}\right] \dot{q}_j \simeq p_k - f_k(q, 0, t)$ (6)

(5) ist nur nach lösbar, falls invertierbar ist, d.h. falls (3) gilt. (7)

Wenn kinetische Energie quadratisch ist in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten und das Potenzial geschwindigkeitsunabhängig, ist das System immer kanonisch:

HS5

Sei $$T = \frac{1}{2}\sum_{ij} \dot{q}_i T_{ij} \dot{q}_j \quad , \text{ mit } \quad T_{ij} = \text{symmetrisch, positiv definit} \qquad (1)$$

(alle Eigenwerte sind >0)

$$\Rightarrow \quad M_{ij} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \qquad , \text{ mit} \qquad (2)$$

Beispiel: Kugelkoordinaten: $$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) \qquad (3)$$

(siehe Blatt 6, Hausaufg.)

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \Rightarrow \quad \dot{r} = p_r/m \qquad (4)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \qquad (5)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} \qquad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta} \qquad (6)$$

$M = \left[\qquad \right]$

= invertierbar!

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - T = \qquad (7)$$

$$= \qquad (8)$$

HS6

Bemerekung: H hängt nicht von $\dot{q}$ ab! Check:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q, \dot{q}, t) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_k} = \qquad (2)$$

Satz: für ein kanonisches System sin die Lagrange-Gleichungen (2. Art) äquivalent zu den "Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (HG)" ("kanonische Bewegungsgleichungen"):

$$\boxed{\forall\, k = 1, \dots, f: \quad \dot{q}_k = \qquad (3a) \qquad \dot{p}_k = \qquad (3b)} \qquad (HG)$$

Bemerkung: aus f Differentialgleichungen 2. Ordnung (L2) werden äquivalent 2f Diff.Gl. 1. Ordnung (HG). Folglich hat Hamilton-Formalismus mehr unabhängige Variablen (2f statt f), und erlaubt somit eine größere Klasse von Transformationen.

Beweis, Teil 1:
(L2) $\Rightarrow$ (Hg)

Betrachte:

$$H \overset{(1)}{=} \left[\sum_j p_j \, \dot{q}_j(q,p,t) - L(q,\dot{q}(q,p,t)) \right]$$

HS7

(1)

(H3.6): $\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = 0$

$$=$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} =$$

Betrachte ferner:

$$H \overset{(6.1)}{=} \left[\sum_j p_j \, \dot{q}_j(q,p,t) - L(q,\dot{q}(q,p,t)) \right]$$

(H3.6): $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \qquad (3)$$

$$= \qquad = \qquad (4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \qquad (5)$$

Teil 1: □

Beweis, Teil 2: Gegeben H(q,p,t), drücke Impulse als mittels (Hg) aus, und def. Lagrange-
(Hg) $\Rightarrow$ (L2)

H8

$$L = \sum_j p \qquad \dot{q}_j - H(q,p \qquad ,t) \qquad (1)$$

Betrachte:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j + p_k - \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_k} \qquad (2)$$

$=$ reproduziert Def. v. kanonischem Impuls

Betrachte:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_j \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \dot{q}_j - \left[\frac{\partial H}{\partial q_k} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right] \qquad (3)$$

$=$ reproduziert (L2) (4)

HS 9

Satz: Für System mit skleronomen (zeitunabhängigen) Zwangsbedingungen und Geschwindigkeitsunabhängigem Potential ist die Hamilton-Funktion gerade die Gesamtenergie des Systems, ausgedrückt durch die verallgemeinerten Koordinaten und Impulse.

(Bemerkung: in diesem Fall hat H eine klare physikalische Bedeutung! Vorteil gegenüber Lagrange...)

Beweis: Für skleronome Zwangsbedingung ist kinetische Energie eine quadratische Form in den

$$T = \frac{1}{2}\sum_{ij} \dot{q}_i T_{ij} \dot{q}_j \;, \qquad V = V(q,t) \tag{1}$$

Kanonische Impulse:

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L \tag{2}$$

Bemerkung: Sind die Potentiale zeitunabhängig, ist die Hamilton-Funktion eine Erhaltungsgröße (3)

Laut Annahme

$$\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial t} = \tag{4}$$

$$\overset{(HG)}{=} \sum_j \Big[\qquad \Big] \tag{5}$$

$\square$.

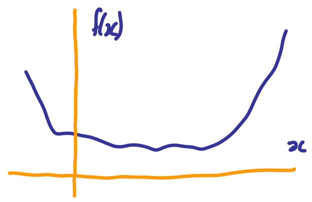
HS 10

Satz: Falls die Hamilton-Funktion nicht von einer bestimmten generalisierten Koordinate abhängt (zyklische Koordinate), ist der dazughörige kanonisch konjugierte Impuls eine Erhaltungsgröße.

(Annahme: q_k ist zyklisch)

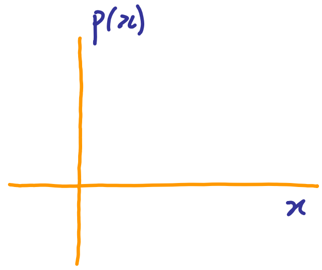
Beweis: Aus $0 = \frac{\partial H}{\partial q_k}$ folgt (1) $\square$

Mathematische Ergänzung: "Legendre-Transformation"



Betrachte Funktion: $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (2)

mit (3)

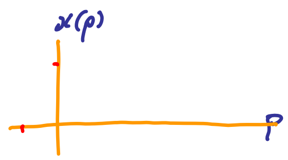


Definiere die Funktion: $p(x) :=$; (4)

Deren Umkehrfunktion sei ; (5)

(diese existiert wegen)

Dann ist die Legendre-Transformierte von $f(x)$



die Funktion

$$\boxed{\tilde{f}(p) := p\, x(p) - f(x(p))} \tag{6}$$

Beispiel:

HS 11

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} x^\alpha , \quad \forall x > 0, \quad \alpha \neq 2 .$$

$$p(x) = f'(x) =$$

$$x(p) =$$

$$\tilde{f}(p) =$$

Bemerkung: Die Legendre-Trf. hat interessante mathematische EIgenschaftne. Y.B. führt sie zwiefach ausgeführt zur Identität. Im Beispiel oben:

$$\tilde{\tilde{f}}(y) = \quad , \text{mit } \gamma =$$

$$=$$

Bei der Legendre-Trf. geht also keine Information verloren,
nur Wechsel der unabhängigen Variablen.

HS 12

Verallgemeinerung dr Legendre-Transformation auf Funktionen mehrerer Variablen:

Betrachte: $f(x_1, \ldots, x_f)$ mit $\det\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right] \neq 0$ (1)

(x_k steht für $\dot{q}_k$ oben)

Definiere: $p_k :=$ und Umkehrfunktionen seien (2)

. (3)

Legendre-Transf.: $\tilde{f}(p_1, \ldots, p_f) :=$

Bemerkung:
Damit ist die Hamilton-Funktion die Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion bezüglich der generalisierten Geschwindigkeiten. (Die generalisierten Koordinatien werden nicht transformiert!)