v23 - 4.7.07 H1

Hamiltonsche Mechanik (Kanonische Mechanik)

Hamilton-Funktion und Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Motivation: Die Hamiltonsche Formulierung der klassischen Mechanik
- erweiterert Klasse der zulässigen koordinaten Transf. (wichtig für Diskussion v. Symmetrien)
- ist ideal für formale Diskussion der mathematischen struktur der klassischen Mechanik.
- verdeutlicht den Bezug der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik.

Zentrale Ergebnisse (Vorschau):

Def: "Hamilton-Funktion":

$$H(\underset{(q_1,\dots,q_f)}{q},\underset{(p_1,\dots,p_f)}{p},t) := \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q,\dot{q},t) \quad \text{wobei} \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{und} \quad \dot{q}_k = \dot{q}_k(q,p) \qquad (1)$$

Hamiltonschen Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (2)$$

Def: "Poisson-Klammer":
$F = F(q,p,t)$, $G = G(q,p,t)$

$$\{F,G\} = \sum_{k=1}^{f}\left[\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k}\right] \quad \left[\xrightarrow{QM} \frac{1}{i\hbar}[\hat{F},\hat{G}] := \frac{1}{i\hbar}\underbrace{(\hat{F}\hat{G}-\hat{G}\hat{F})}\right] \qquad (3)$$

"Kommutator"

Bewegungsgl. ausgedrückt durch Poisson-Klammern:

$$\frac{dF}{dt} = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad \left[\xrightarrow{QM} \frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{F},\hat{H}] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}\right] \qquad (4)$$

H2

Einfachstes Beispiel: freies Teilchen in konservativem Kraftfeld

Lagrange-Funktion:
$$L = \tfrac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q,t) \qquad (1)$$

Kanonischer Impuls:
$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \dot{q}(q,p) = p/m \qquad (2)$$

Hamilton-Funktion:
$$H(p,q) \overset{(1.1)}{=} p\dot{q} - L = p(p/m) - \left[\tfrac{1}{2}m(p/m)^2 - V\right] \qquad (3)$$
$$= \frac{p^2}{2m} + V(q,t) = \text{Energie} \qquad (4)$$

Hamilton-Gl:
$$\dot{q} \overset{(1.2)}{=} \frac{\partial H}{\partial p} = p/m \overset{\checkmark}{=} (2) \quad ; \quad \dot{p} \overset{(1.2)}{=} -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} \overset{\checkmark}{=} (N2) \qquad (5)$$

Poisson-Klammer für $F = q$, $G = p$:
$$\{q,p\} \overset{(1.3)}{=} \frac{\partial q}{\partial q}\frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial q} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1 \qquad (6)$$

$$\left\{ (1.3) \; \xrightarrow{QM} \; \underline{\cancel{\tfrac{1}{i\hbar}}[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar} \right\} \text{Vorschau}$$

Inschrift auf Grabstein von Max Born

Zeitentwicklung von q via Poisson-Klammern:
$$\frac{dq}{dt} \overset{(1.4)}{=} \{q,H\} + \overset{=0}{\frac{\partial q}{\partial t}} = \overset{1}{\frac{\partial q}{\partial q}}\overset{p/m}{\frac{\partial H}{\partial p}} - \overset{0}{\frac{\partial q}{\partial p}}\frac{\partial H}{\partial q} = p/m \qquad (7)$$

Allgemeine Formulierung

Verallg. Koordinaten seien: $q = (q_1, \dots, q_f)\ , \quad \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ (1)

Kanonischen Impulse: $p = (p_1, \dots, p_f)\ ,\quad \text{mit} \quad p_i = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}$ (2)

Ziel: ein Formalismus, dessen Variablen nicht $(q, \dot{q})$ sondern (q, p) sind!

Def: Hamilton-Funktion (engl: Hamiltonian):
Ein System, das durch eine Langrange-Funktion mit $\det\Big(\overbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}}^{M_{ij}}\Big) = \det M_{ij} \neq 0$ (3)

beschrieben wird, heisst "kanonisch". Ein kanonisches System hat eine sog. Hamiltonfunktion.

$$\boxed{H(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f, t) := \sum_k p_k \dot{q}_k(q,p,t) - L(q, \dot{q}(q,p,t), t)}$$ (4)

Vektoren, wie in (1)

Die unabhängigen Variablen der Hamilton-Funktion sind:
- die generalisierten Koordinaten q_i
- die generalisierten Impulse ("kanonisch konjugierten Impulse") $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ (5)
- "p und q sind unabhängige Variablen" bedeutet: $\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0$ (6)

Bemerkung: (4) ist eine Legendre-Transformation von L zu H, wodurch die $\dot{q}$ durch p als unabhängige Variable ersetzt wird. Wozu die Einschränkung (3.3)?

Um H = (4) zu konstruieren muss sich $\dot{q}_k$ eindeutig als $\dot{q}_k = \dot{q}_k(q, p, t)$ ausdrücken lassen. (1)

Anders gesagt, $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k(q,\dot{q},t)$ muss sich nach den $\dot{q}_k$ auflösen lassen. (2)

Nach dem Satz über invertierbare Funktionen ist dies genau dann möglich, wenn die Matrix

$$M_{kj} = \frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{invertierbar ist, d.h.} \quad \det(M_{kj}) \neq 0$$ (3)

invertierbar ist, das System also kanonisch ist. Plausibilitätsarg. für diesen Satz: (4)

Betrachte die Funktionen $p_k = f_k(q, \dot{q}, t)\ , \quad k = 1, \dots, f$

Taylor-Entw. nach 2.tem Argument: $= f_k(q, 0, t) + \sum_{j=1}^{f} \left[\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j}\right]_{\dot{q}=0} \dot{q}_j + O(\dot{q}^2)$ (5)

Betrachte Limes $\dot{q}_k \to 0$: $\Rightarrow \quad \sum_j \underbrace{\left[\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j}\right]_{\dot{q}=0}}_{M_{kj}} \dot{q}_j \simeq p_k - f_k(q, 0, t)$ (6)

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$$ $\dot{q}$

(5) ist nur nach $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q,p)$ lösbar, falls M_{kj} invertierbar ist, d.h. falls (3) gilt. (7)

Wenn kinetische Energie quadratisch ist in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten und das Potenzial geschwindigkeitsunabhängig, ist das System immer kanonisch:

HS5

Sei $T = \frac{1}{2}\sum_{ij} \dot q_i T_{ij} \dot q_j$, mit T_{ij} = symmetrisch, positiv definit (1)
(alle Eigenwerte sind >0)

$\Rightarrow \quad M_{ij} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j} = T_{ij}$, mit $\det M_{ij} \neq 0$ (2)

Beispiel: Kugelkoordinaten:
(siehe Blatt 6, Hausaufg.)

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot r^2 + r^2 \dot\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, \dot\varphi^2 \right) \qquad (3)$$
$$V = 0$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m \dot r \quad \Rightarrow \quad \dot r = p_r/m \qquad (4)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m r^2 \dot\theta \quad \Rightarrow \quad \dot\theta = \frac{p_\theta}{m r^2} \qquad (5)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m r^2 \sin^2\theta \, \dot\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{m r^2 \sin^2\theta} \qquad (6)$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m r^2 & 0 \\ 0 & 0 & m r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

= invertierbar!

$$H = \sum_k p_k \dot q_k - L = \left[p_r \left(\frac{p_r}{m}\right) + p_\theta \left(\frac{p_\theta}{m r^2}\right) + p_\varphi \frac{p_\varphi}{m r^2 \sin^2\theta} \right] - L \qquad (7)$$

$$= \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta} \right] \qquad (8)$$

HS6

~~Bemerkung: H hängt nicht von $\dot q$ ab! Check:~~ $\cancel{H = \sum_{ij} \dots (q, \dot q, t)}$ (1)

STREI-
CHEN

$\cancel{\frac{\partial H}{\partial \dot q_k} = p_k - \frac{\partial L(q, \dot q, t)}{\partial \dot q_k}}$ (2)

Satz: für ein kanonisches System sind die Lagrange-Gleichungen (2. Art) äquivalent zu den "Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (HG)" ("kanonische Bewegungsgleichungen"):

$$\boxed{\forall\, k = 1, \dots, f: \quad \dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (3a) \qquad \dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (3b)} \qquad \text{(HG)}$$

Bemerkung: aus f Differentialgleichungen 2. Ordnung (L2) werden äquivalent 2f Diff.Gl. 1. Ordnung (HG). Folglich hat Hamilton-Formalismus mehr unabhängige Variablen (2f statt f), und erlaubt somit eine größere Klasse von Transformationen.
↑ ("kanonische Transf.")

Beweis, Teil 1: (L2) $\Rightarrow$ (H9)

Betrachte:
$$\frac{\partial H}{\partial p_k} \overset{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial p_k}\left[\sum_j p_j\, \dot q_j(q,p,t) - L(q,\dot q(q,p,t))\right] \qquad (1)$$

(H3.6): $\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = 0$

$$= \dot q_k(p,q,t) + \sum_j p_j \frac{\partial \dot q_j(q,p,t)}{\partial p_k} - \sum_j \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}}_{p_j} \frac{\partial \dot q_j}{\partial p_k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot q_k = (6.3a)$$

Betrachte ferner:
$$\frac{\partial H}{\partial q_k} \overset{(6.1)}{=} \frac{\partial}{\partial q_k}\left[\sum_j p_j\, \dot q_j(q,p,t) - L(q,\dot q(q,p,t))\right]$$

(H3.6): $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_j p_j \frac{\partial \dot q_j(q,p,t)}{\partial q_k} - \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_j \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}}_{p_j} \frac{\partial \dot q_j}{\partial q_k}\right] \qquad (3)$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q_k} \overset{(L2)}{=} -\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}}_{p_k}\Big) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot p_k = (6.3b) \checkmark \qquad \text{Teil 1: } \square \qquad (5)$$

Beweis, Teil 2: (H9) $\Rightarrow$ (L2)

Gegeben H(q,p,t), drücke Impulse als $p \overset{\text{mittels (H9)}}{=} p(q,\dot q,t)$ aus, und def. Lagrange-

$q \qquad \dot q$

$$L(q,\dot q,t) = \sum_j p_j(q,\dot q,t)\, \dot q_j - H(q, p(q,\dot q,t), t) \qquad (1)$$

Betrachte:
$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = \sum_j \frac{\partial p_j}{\partial \dot q_k} \dot q_j + p_k - \sum_j \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j}}_{(H9b)\ \dot q_k} \frac{\partial p_j}{\partial \dot q_k} \qquad (2)$$

$$= p_k \quad \text{reproduziert Def. v. kanonischem Impuls}$$

Betrachte:
$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_j \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \dot q_j - \left[\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_k}}_{(H9a):\ -\dot p_k} + \sum_j \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j}}_{\dot q_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_k}\right] \qquad (3)$$

$$= \dot p_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right) \quad \text{reproduziert (L2)} \checkmark \qquad (4)$$

HS 9

Satz: Für System mit skleronomen (zeitunabhängigen) Zwangsbedingungen und Geschwindigkeitsunabhängigem Potential ist die Hamilton-Funktion gerade die Gesamtenergie des Systems, ausgedrückt durch die verallgemeinerten Koordinaten und Impulse.

(Bemerkung: in diesem Fall hat H eine klare physikalische Bedeutung! Vorteil gegenüber Lagrange...)

Beweis: Für skleronome Zwangsbedingung ist kinetische Energie eine quadratische Form in den

$$T = \frac{1}{2}\sum_{ij} \dot q_i T_{ij} \dot q_j \,, \quad V = V(q,t) \qquad (1)$$

Kanonische Impulse:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = \sum_j T_{kj}\dot q_j$$

$$H = \underbrace{\sum_k \dot q_k p_k}_{2T} - L = 2T - (T - V) = T + V \qquad (2)$$

$$p_k = \sum_j T_{jk}\dot q_j$$

Bemerkung: Sind die Potentiale zeitunabhängig, ist die Hamilton-Funktion eine Erhaltungsgröße (3)

$$\frac{d\,H(q,p,t)}{dt} = \sum_j \left[\frac{\partial H}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\dot p_k + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial t}}_{=0 \text{ Laut Annahme}} \right] \qquad (4)$$

$$\overset{(HG)}{=} \sum_j \left[-\dot p_k \dot q_k + \dot q_k \dot p_k \right] = 0 \;\checkmark \qquad (5)$$

□.

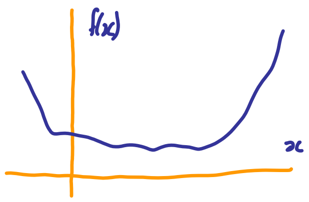
HS 10

Satz: Falls die Hamilton-Funktion nicht von einer bestimmten generalisierten Koordinate abhängt (zyklische Koordinate), ist der dazughörige kanonisch konjugierte Impuls eine Erhaltungsgröße.

(Annahme: q_k ist zyklisch)

Beweis: Aus $0 = \frac{\partial H}{\partial q_k} \overset{(HG)}{=} -\dot p_k$ folgt $p_k = \text{const.}$ (1) □

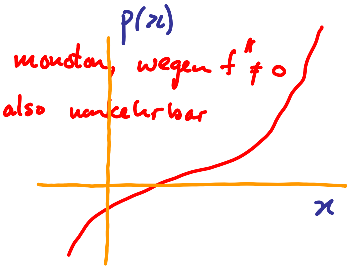
Mathematische Ergänzung: "Legendre-Transformation"



Betrachte Funktion: $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (2)

(x steht für $\dot q$ oben)

mit $f''(x) \neq 0 \;\; \forall x$ (3)

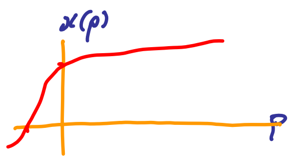


Definiere die Funktion: $p(x) := f'(x)$; (4)

Deren Umkehrfunktion sei $x = x(p)$; (5)

(diese existiert wegen $f'' \neq 0$)

Dann ist die Legendre-Transformierte von $f(x)$



die Funktion $\boxed{\tilde f(p) := p\,x(p) - f(x(p))}$ (6)

Beispiel:

HS 11

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} x^{\alpha}, \quad \forall x > 0, \quad \alpha \neq 2.$$

$$p(x) = f'(x) = x^{\alpha-1}$$

$$x(p) = p^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha}$$

$$\tilde{f}(p) = \underbrace{p^{1+\frac{1}{\alpha-1}}}_{p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} - \frac{1}{\alpha}\Big[\underbrace{p^{\frac{1}{\alpha-1}}}_{p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\Big]^{\alpha} = \left(\frac{1}{\beta}\right) p^{\beta}$$

$$\text{mit } \beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\beta} p^{\beta}$$

Bemerkung: Die Legendre-Trf. hat interessante mathematische EIgenschaften. Z.B. führt sie zwiefach ausgeführt zur Identität. Im Beispiel oben:

$$\tilde{\tilde{f}}(y) = \frac{1}{\gamma} y^{\gamma}, \quad \text{mit } \gamma = \frac{\beta}{\beta-1} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha-1}}{\frac{\alpha}{\alpha-1} - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - (\alpha-1)} = \alpha$$

$$= \frac{1}{\alpha} y^{\alpha} = f(y)$$

Bei der Legendre-Trf. geht also keine Information verloren,
nur Wechsel der unabhängigen Variablen.

Verallgemeinerung der Legendre-Transformation auf Funktionen mehrerer Variablen:

HS 12

Betrachte:

(x_k steht für $\dot{q}_k$ oben)

$$f(x_1, \dots, x_f) \quad \text{mit} \quad \det\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right] \neq 0 \qquad (1)$$

Definiere:

$$p_k := \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad \text{und Umkehrfunktionen seien } x_k(p). \qquad (2)$$

Legendre-Transf.:

$$\tilde{f}(p_1, \dots, p_f) := \sum_k \left[p_k x_k(p) - f(x_1(p), \dots, x_f(p))\right] \qquad (3)$$

Bemerkung:
Damit ist die Hamilton-Funktion die Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion bezüglich der generalisierten Geschwindigkeiten. (Die generalisierten Koordinatien werden nicht transformiert!)