Poisson-Klammern

V24 - 05.07.07

H13

Betrachte zwei physikalische Grössen, die von den Koordinaten, Impulsen und Zeit abhängen:

$$F = \qquad\qquad g = \tag{1}$$

Def: "Poisson-Klammer von F und G":

$$\boxed{\{F, g\} := \qquad\qquad} \tag{2}$$

Einfachste Beispiele: im Hamilton-Formalismus sind p , q , t unabhängige Variablen, also:

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \qquad \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \qquad \frac{\partial q_i}{\partial t} = \tag{3}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = \qquad \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \qquad \frac{\partial p_i}{\partial t} = \tag{4}$$

$F = q_i,\ g = q_j$: $\{q_i, q_j\} =$ (5)

$F = p_i,\ g = p_j$: $\{p_i, p_j\} =$ (6)

$F = q_i,\ g = p_j$: $\{q_i, p_j\} =$ (7)

H14

Satz: Poisson-Klammer hat folgende Eigenschaften:

(i) Antisymmetrie: $\{F, g\} =$ (1)

(ii) Distribution: $\{c_1 F_1 + c_2 F_2 , g\} =$ (2)

(iii) "Jacobi-Identität": (zyklische Vertauschung) $\{\ ,\{\ ,\ \}\} + \{\ ,\{\ ,\ \}\} + \{\ ,\{\ ,\ \}\} = 0$ (3)

(iv) "Faktorisierungszerlegung": $\{F, gK\} =$; $\{gK, F\} =$ (4)

Satz: Die Zeitabhängigkeit einer beliebigen dynamischen Größe $F(q,p,t)$ ist gegeben durch:

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}} \tag{5}$$

Beweis: $\frac{dF}{dt} =$ (6)

(H9): $= \sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k} \qquad + \frac{\partial F}{\partial p_k} \qquad + \frac{\partial F}{\partial t}$ (7)

□

Bemerkungen: H15

1. Gl. (14.5) enthält u.a. die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen als Spezialfall:

$$F = q_i: \quad \dot{q} \overset{(14.5)}{=} \{q, H\} \overset{(14.7)}{=} \tag{1}$$

$$F = p_i: \quad \dot{p} \overset{(14.5)}{=} \{p, H\} \overset{(14.7)}{=} \tag{2}$$

2. Eine nicht explizit zeitabhängige Größe ist genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn die Poisson-Klammer mit H verschwindet:

$$\text{falls} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \text{gilt} \quad \{F, H\} = 0 \overset{(14.5)}{\Leftrightarrow} \tag{3}$$

3. Mittels der Rechenregeln (14.1-4) lässt sich jede Rechnung auf die Grundregeln (13.5-7) reduzieren.

4. Ausblick: Die Quantenmechanik (QM) ist eine andere Realisierung einer Theorie mit
- (13.5-7) als Grundregeln,
- (14.1-4) als Rechenregeln,
- (14.5) als Bewegungsgleichung

Heisenberg lieferte eine Matrix-Formulierung der QM: H16

- Physikalische Größen: dargestellt durch (unendlich-dimensionale) Matrizen: (1)

- Produkt zweier Größen: Matrixprodukt, nicht kommutativ: (2)

"Kommutator von $\hat{q}$ und $\hat{p}$"

- Kommutator von Matrizen erfüllt Rechenregeln (14.1-4)!

- Poisson-Klammer der kl. Mech. wird in der QM ersetzt durch: (3)

- Grundregel (13.5-7): $[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = \quad , \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = \quad , \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] =$ (4)

- Bewegungsgl (14.5): $\dfrac{dF}{dt} = \{F, H\} + \dfrac{\partial F}{\partial t}$ (5)

Dies ist "Heisenbergs Bewegungsgl. für Operatoren, äquivalent zur Schrödingergl. der Wellenformulierung der QM.

H17

Satz: Die Poisson-Klammer zweier (nicht explizit zeitabhängiger) Erhaltungsgrößen ist selbst eine (nicht explizit zeitabhängige) Erhaltungsgröße.

Beweis: Sei $\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$ und F und G erhalten, (1)

d.h. $\{F_1, H\} = \{F_2, H\} = 0$ (2)

zu zeigen: für $G :=$ gilt und (3)

Explizit: $\{G, H\} =$

$\overset{\text{Jacobi, (14.3)}}{=} - \{\{\ ,\ \},\ \} - \{\{\ ,\ \}\ \}$

Bemerkung: die Erhaltungsgrößen bilden also eine abgeschlossene "Algebra". hier: Poisson-Klammer
(Siehe Mathematische Def. einer Algebra: Menge von Elementen mit einer Kompositionsregel, laut der die Komposition zweier Elemente der Algebra wieder ein Element der Algebra ist.)
Die Poisson-Klammer-Algebra hat in der Regel nur eine endliche Anzahl von Elementen, da die Poisson-Klammer zweier Größen eine Linearkombination von schon bekannten Erhaltungsgrößen

H18

Beispiel: Drehimpuls-Algebra

Betrachte f Punktmassen, miteinander wechselwirkend via einem zentralsymmetrischen Potenzial:

$$H = T + V, \quad \text{mit} \quad T = \sum_{j=1}^{f} \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{r}}_j^{\,2}, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \tag{1}$$

Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^{f} \vec{L}_j = \sum_{j=1}^{f} \vec{r}_j \times \vec{p}_j \tag{2}$$

Wir wissen bereits : Gesamtdrehimpulsvektor ist eine Erhaltungsgröße (siehe Seite NM17).
Laut (15.3) muss folglich gelten: $\{\vec{L}, H\} =$ (siehe H19 und Übung!) (3)

Die Poisson-Klammer von zwei Komponenten von L (beide Erhaltungsgrößen) liefert (siehe Übung!):

Levi-Civita

$\{L_x, L_y\} =$
$\{L_y, L_z\} =$ $\qquad \{L_a, L_b\} =$ (4)
$\{L_z, L_x\} =$

Fazit: Die 3 Komponenten des Drehimpulses bilden eine geschlossen Algebra mit 3 Elementen.

In diesem Beispiel liefert die Poisson-Klammer also keine neuen Erhaltungsgrößen
(in anderen Beispielen könnte das aber durchaus passieren!)

Beispiel:

$\{r_{ai}, r_{bj}\} =$ (6a)

$\{p_{ai}, p_{bj}\} =$ (6b)

$\{r_{ai}, p_{bj}\} =$ (6c)

$$\left\{L_{xi}, \frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2m_j}\right\} = \frac{1}{2m_j}\left\{r_{yi}p_{zi} - r_{zi}p_{yi},\ p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2\right\} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2m_i}\left[\{r_{yi}p_{zi}, p_{yj}^2\} - \{r_{zi}p_{yi}, p_{zj}^2\} + 0\right] \quad (2)$$

Zwischenrechnung

$$= \frac{\delta_{ij}}{2m_i}\left[2p_{yi}p_{zi} - 2p_{zi}p_{yi}\right] = 0 \quad (3)$$

Zwischenrechnung ①:

$\{gK, F\} = g\{K,F\} + \{g,F\}K$ (14.4)

$\{F, gK\} = g\{F,K\} + \{F,g\}K$

$$\{r_{yi}p_{zi}, p_{yj}^2\} \overset{(14.4)}{=} \{\ \ , p_{yj}^2\} + \{\ \ , p_{yj}^2\} \quad (4)$$

$$\{r_{yi}, p_{yj}p_{yj}\} \overset{(14.4)}{=} \{r_{yi},\ \ \} + \{r_{yi},\ \ \} \quad (5)$$

(1,2): $\{r_{yi}p_{zi}, p_{yj}^2\} =$ (6)

Analog für ②: $\{r_{zi}p_{yi}, p_{zi}^2\} =$ (4)

Analog für L_{yi}, L_{zi} $\Rightarrow$ $\{\vec{L}_i, T\} = 0$ (1)

Analog kann gezeigt werden: $\{\vec{L}, V\} = 0$ (2)
(Übung!)

[Hinweis für Übung: $$\frac{\partial v(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial r_{ak}} = v'(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)\,\frac{r_{ak}(\delta_{ki} - \delta_{kj})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (3)$$

Phasenraum und Liouvillescher Satz

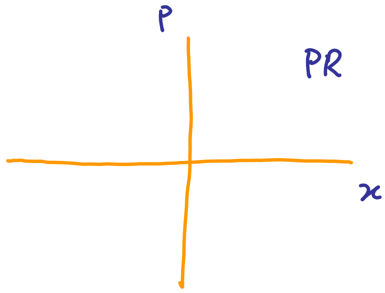
H21

Phasenraum = 2f-dimensionaler Raum der gen. Koordinaten und kanonisch konjugierten Impulse.
Kenntnis der Dynamik bedeutet: Kenntnis der Trajektorien im Phasenraum (PR),

$$x(t) = \left(q_1(t), \dots, q_f(t), p_1(t), \dots, p_f(t) \right) \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_i &= q_i \\ x_{f+i} &= p_i \end{aligned}\right\} \ \forall\, i = 1, \dots, f \qquad := \qquad (2)$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator



$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \qquad , \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} =$$

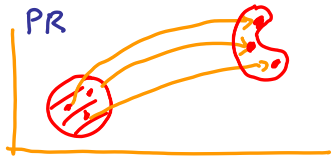
Bewegung verläuft periodisch, mit unabhängig v. Anfangsbedingungen.

Bewegung im Phasenraum ist analog zu Strömung einer Flüssigkeit, Trajektorien schneiden sich nicht. Welche Eigenschaften hat diese Flüssigkeit?

H22

Satz: Liouvillescher Satz
für ein kanonisches System ist der Fluß im Phasenraum volumenerhaltend (divergenzfrei).

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Vol}\, \Omega_t\right) = 0} \qquad (1)$$



Beweis: Gegeben sei Volumen im Phasenraum zur Zeit t:

$$\mathrm{Vol}\, \Omega_t = \int_{\Omega_t} dx_1 \dots dx_{2f} \qquad (2)$$

Dessen Zeitentwicklung wird beschrieben durch Zeitentwicklung der PR-Koordinaten.
Betrachte infinitesimales Zeitinterval:

$\dot{x}_i$ ist Fn. v. x.

$$x_i(t+\tau) = \qquad (3)$$

Neues Volumen: $\mathrm{Vol}\, \Omega_{t+\tau} =$ (4)

"Jacobi-Determinante"

Variablentransformation zurück zu alten PR-Koordinaten: $=$ (5)

Mathematischer Satz über Koordinatentransformationen bei Integralen: H23

Für Transformation der Form $\quad x_i' =$ (1)

transformiert das Volumenelement wie folgt, $\quad dx_1' \dots dx_n' =$ (2)

Mit Jacobi-Determinate: $\quad J_{ij}(x) =$ Ende der Aussage des math. Satzes (3)

Hier: (23.1) ist durch (22.3) gegeben, also: $\quad J_{ij} =$ (4)

$$\det J = \begin{bmatrix} \left(1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1}\right) & \tau \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} & \cdots & \tau \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_n} \\ \tau \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \left(1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}\right) & \cdots & \tau \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \tau \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_1} & & & \left(1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_n}\right) \end{bmatrix}$$

H24

$$\det J = \qquad (1)$$

$$= 1 + \qquad + O(\tau^2) \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} x_i &= q_i \\ x_{f+i} &= p_i \end{aligned}\right\} \forall\, i = 1, \dots, f \qquad = 1 + \qquad + O(\tau^2) \qquad (3)$$

nutze nun (HG):

$$= 1 + \tau \sum_{j=1}^{f} \Big[\qquad \Big] + O(\tau^2) \qquad (4)$$

(4) eingesetzt in (22.5) (5)

$$\mathrm{Vol}\,\Omega_{t+\tau} = \int_{\Omega'} dx_1' \dots dx_{2f}'$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Vol}\,\Omega = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left[\mathrm{Vol}\,\Omega_{t+\tau} - \mathrm{Vol}\,\Omega \right] = \qquad (6)$$