

Betrachte zwei physikalische Größen, die von den Koordinaten, Impulsen und Zeit abhängen:

$$F = F(q, p, t) \qquad G = G(q, p, t) \qquad (1)$$

Def: "Poisson-Klammer von F und G":

$$\{F, G\} := \sum_{k=1}^f \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} \right] \qquad (2)$$

Einfachste Beispiele: im Hamilton-Formalismus sind p , q , t unabhängige Variablen, also:

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \qquad \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0 \qquad \frac{\partial q_i}{\partial t} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0 \qquad \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial t} = 0 \qquad (4)$$

$F = q_i, G = q_j :$

$$\{q_i, q_j\} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) = 0 \qquad (5)$$

$F = p_i, G = p_j :$

$$\{p_i, p_j\} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0 \qquad (6)$$

$F = q_i, G = p_j :$

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - 0 \cdot 0 = \sum_{k=1}^f \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij} \qquad (7)$$

Satz: Poisson-Klammer hat folgende Eigenschaften:

(i) Antisymmetrie:

$$\{F, G\} = -\{G, F\} \qquad (1)$$

(ii) Distribution:

$$\{c_1 F_1 + c_2 F_2, G\} = c_1 \{F_1, G\} + c_2 \{F_2, G\} \qquad (2)$$

(iii) "Jacobi-Identität":
(zyklische Vertauschung)

$$\{F, \{G, K\}\} + \{K, \{F, G\}\} + \{G, \{K, F\}\} = 0 \qquad (3)$$

(iv) "Faktorisierungszersetzung":

$$\begin{aligned} \{F, GK\} &= G\{F, K\} + \{F, G\}K \\ \{GK, F\} &= G\{K, F\} + \{G, F\}K \end{aligned} \qquad (4)$$

Satz: Die Zeitabhängigkeit einer beliebigen dynamischen Größe $F(q, p, t)$ ist gegeben durch:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (5)$$

Beweis: $\frac{dF}{dt}(q(t), p(t), t) = \sum_{k=1}^f \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right] + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (6)$

$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} (H_G):$

$$= \sum_k \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial F}{\partial p_k} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \right] + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad \square \qquad (7)$$

Bemerkungen:

1. Gl. (14.5) enthält u.a. die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen als Spezialfall:

$$F = q_i: \quad \frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i \stackrel{(14.5)}{=} \{q_i, H\} + \frac{\partial q_i}{\partial t} \stackrel{(14.7)}{=} \sum_k \delta_{ki} \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1)$$

$$F = p_i: \quad \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i \stackrel{(14.5)}{=} \{p_i, H\} + \frac{\partial p_i}{\partial t} \stackrel{(14.7)}{=} \sum_k \delta_{ki} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2)$$

2. Eine nicht explizit zeitabhängige Größe ist genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn die Poisson-Klammer mit H verschwindet:

$$\text{falls } \frac{dF}{dt} = 0, \quad \text{gilt } \{F, H\} = 0 \stackrel{(14.5)}{\Leftrightarrow} \frac{dF}{dt} = 0 \quad (3)$$

3. Mittels der Rechenregeln (14.1-4) lässt sich jede Rechnung auf die Grundregeln (13.5-7) reduzieren.

4. Ausblick: Die Quantenmechanik (QM) ist eine andere Realisierung einer Theorie mit

- (13.5-7) als Grundregeln,
- (14.1-4) als Rechenregeln,
- (14.5) als Bewegungsgleichung

Heisenberg lieferte eine Matrix-Formulierung der QM:

- Physikalische Größen: dargestellt durch (unendlich-dimensionale) Matrizen $F \rightarrow \hat{F}; \quad G \rightarrow \hat{G}$ (1)

- Produkt zweier Größen: Matrixprodukt, nicht kommutativ: $[\hat{F}, \hat{G}] := \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} \neq 0$ (2)
 "Kommutator von \hat{F} und \hat{G} "

- Kommutator von Matrizen erfüllt Rechenregeln (14.1-4)!

- Poisson-Klammer der kl. Mech. wird in der QM ersetzt durch: $\{F, G\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{G}]$ (3)
 \approx Plancksche Konst.

- Grundregel (13.5-7): $[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad \frac{1}{i\hbar} [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = \delta_{ij}$ (4)

- Bewegungsgl (14.5): $\frac{dF}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}$ (5)

Dies ist "Heisenbergs Bewegungsgl. für Operatoren, äquivalent zur Schrödingergl. der Wellenformulierung der QM.

Satz: Die Poisson-Klammer zweier (nicht explizit zeitabhängiger) Erhaltungsgrößen ist selbst eine (nicht explizit zeitabhängige) Erhaltungsgröße.

Beweis: Sei $\frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$ und F_1 und F_2 erhalten, (1)

dh. $\{F_1, H\} = \{F_2, H\} = 0$ (2)

zu zeigen: für $G := \{F_1, F_2\}$ gilt $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$ und $\{G, H\} = 0$ (3)
↑ trivial

Explizit: $\{G, H\} = \{\{F_1, F_2\}, H\}$
Jacobi, (4.3)
 $= -\{\{H, F_1\}, F_2\} - \{\{F_2, H\}, F_1\} = 0$
 $= 0 \leftarrow \text{laut (2)} \rightarrow = 0$

Bemerkung: die Erhaltungsgrößen bilden also eine abgeschlossene "Algebra". hier: Poisson-Klammer
 (Siehe Mathematische Def. einer Algebra: Menge von Elementen mit einer Kompositionsregel, laut der die Komposition zweier Elemente der Algebra wieder ein Element der Algebra ist.)
 Die Poisson-Klammer-Algebra hat in der Regel nur eine endliche Anzahl von Elementen, da die Poisson-Klammer zweier Größen eine Linearkombination von schon bekannten Erhaltungsgrößen produzieren kann, oder einfach eine Zahl.

Beispiel: Drehimpuls-Algebra

Betrachte f Punktmassen, miteinander wechselwirkend via einem zentralsymmetrischen Potenzial:

$H = T + V$, mit $T = \sum_{j=1}^f \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{r}}_j^2$, $V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ (1)

Gesamtdrehimpuls: $\vec{L} = \sum_{j=1}^f \vec{L}_j = \sum_{j=1}^f \vec{r}_j \times \vec{p}_j$ (2)

Wir wissen bereits: Gesamtdrehimpulsvektor ist eine Erhaltungsgröße (siehe Seite NM17).
 Laut (15.3) muss folglich gelten:

$\{\vec{L}, H\} = 0$ (siehe H19 und Übung!) (3)

Die Poisson-Klammer von zwei Komponenten von L (beide Erhaltungsgrößen) liefert (siehe Übung!):

$\{\hat{L}_a, \hat{L}_b\} = i \epsilon_{abc} \hat{L}_c$ ↔
 $\{L_x, L_y\} = L_z$
 $\{L_y, L_z\} = L_x$
 $\{L_z, L_x\} = L_y$
 $\{L_a, L_b\} = \sum_c \epsilon_{abc} L_c$ (4)
Levi-Civita
a, b = x, y, z

Fazit: Die 3 Komponenten des Drehimpulses bilden eine geschlossene Algebra mit 3 Elementen.

In diesem Beispiel liefert die Poisson-Klammer also keine neuen Erhaltungsgrößen (in anderen Beispielen könnte das aber durchaus passieren!)

Beispiel:

$$\{\tau_{ai}, \tau_{bj}\} = 0 \quad (6a)$$

$$\{p_{ai}, p_{bj}\} = 0 \quad (6b)$$

$$\{\tau_{ai}, p_{bj}\} = \delta_{ij} \delta_{ab} \quad (6c)$$

i : Teilchenindex
 a : x, y, z

Zwischenrechnung ①:

$$\{g_{k,f}\} = g\{k,f\} + \{g,f\}k:$$

$$\{f,g\} = g\{f,k\} + \{f,g\}k:$$

(5) in (4)

Analog für ②:

$$\{L_{vi}, \frac{\vec{p}_j^2}{2m_j}\} = \frac{1}{2m_j} \left\{ \tau_{yi} p_{zi} - \tau_{zi} p_{yi}, p_{xj}^2 + p_{yj}^2 + p_{zj}^2 \right\} \quad (1) \quad \underline{H19}$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{2m_i} \left[\{ \tau_{yi} p_{zi}, p_{yj}^2 \} - \{ \tau_{zi} p_{yi}, p_{zj}^2 \} + 0 \right] \quad (2)$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{2m_i} \left[2 p_{yi} p_{zi} - 2 p_{zi} p_{yi} \right] = 0 \quad (3)$$

$$\{ \tau_{yi} p_{zi}, p_{yj}^2 \} = \tau_{yi} \{ p_{zi}, p_{yj}^2 \} + \{ \tau_{yi}, p_{yj}^2 \} p_{zi} \quad (4)$$

$$\{ \tau_{yi}, p_{yj}^2 \} = p_{yj} \{ \tau_{yi}, p_{yj} \} + \{ \tau_{yi}, p_{yj} \} p_{yj} = 2 p_{yj} \quad (5)$$

$$\{ \tau_{yi} p_{zi}, p_{yj}^2 \} = 2 p_{yj} p_{zi} \quad (7)$$

$$\{ \tau_{zi} p_{yi}, p_{zj}^2 \} = 2 p_{zj} p_{yi} \quad (8)$$

Analog für $L_{yi}, L_{zi} \Rightarrow \{ \vec{L}_i, T \} = 0 \quad (1) \quad \underline{H20}$

Analog kann gezeigt werden: $\{ \vec{L}, V \} = 0 \quad (2)$

[Hinweis für Übung: $\frac{\partial \psi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial \tau_{ak}} = \psi'(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \frac{\tau_{ak} (\delta_{ki} - \delta_{kj})}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (3)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_{ak}} = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \{ \vec{L}, H \} = 0.$$

Phasenraum und Liouvillescher Satz

H21

Phasenraum = $2f$ -dimensionaler Raum der gen. Koordinaten und kanonisch konjugierten Impulse.
 Kenntnis der Dynamik bedeutet: Kenntnis der Trajektorien im Phasenraum (PR),

$\Rightarrow \mathbb{R}^{2f}$

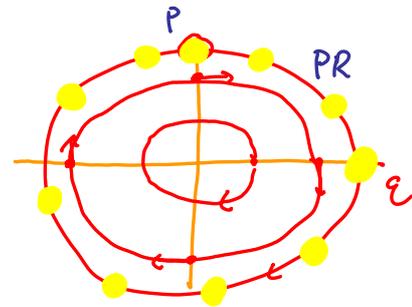
$$x(t) = (q_1(t), \dots, q_f(t), p_1(t), \dots, p_f(t)) \quad (1)$$

$$\left. \begin{matrix} x_i = q_i \\ x_{f+i} = p_i \end{matrix} \right\} \forall i=1, \dots, f \quad := (x_1(t), \dots, x_f(t), x_{f+1}(t), \dots, x_{2f}(t)) \quad (2)$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator ($f=1$)

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m \omega^2 q$$



Bewegung verläuft periodisch, mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ unabhängig v. Anfangsbedingungen.

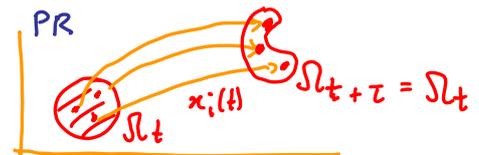
Bewegung im Phasenraum ist analog zu Strömung einer Flüssigkeit, Trajektorien schneiden sich nicht. Welche Eigenschaften hat diese Flüssigkeit?

Satz: Liouvillescher Satz

H22

für ein kanonisches System ist der Fluß im Phasenraum volumenerhaltend (divergenzfrei).

$$\frac{d}{dt} (\text{Vol } \Omega_t) = 0 \quad (1)$$



Beweis: Gegeben sei Volumen im Phasenraum zur Zeit t:

$$x = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$$

$$\text{Vol } \Omega_t = \int_{\Omega_t} dx_1 \dots dx_{2f} \quad (2)$$

Dessen Zeitentwicklung wird beschrieben durch Zeitentwicklung der PR-Koordinaten.
 Betrachte infinitesimales Zeitintervall:

\dot{x}_i ist Fu. v. x .

$$x'_i = x_i(t+\tau) = x_i(t) + \tau \dot{x}_i(x) \quad (3)$$

Neues Volumen:

$$\text{Vol } \underbrace{\Omega_{t+\tau}}_{\Omega'} = \int_{\Omega'} dx'_1 \dots dx'_{2f} \quad (4)$$

"Jacobi-Determinante"

Variablentransformation zurück zu alten PR-Koordinaten:

$$= \int_{\Omega} dx_1 \dots dx_{2f} |\det J(x)| \quad (5)$$

Mathematischer Satz über Koordinatentransformationen bei Integralen:

H23

Für Transformation der Form $x'_i = x'_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ ($n=2f$) (1)

transformiert das Volumenelement wie folgt, $dx'_1 \dots dx'_n = dx_1 \dots dx_n |\det J(x)|$ (2)

Mit Jacobi-Determinante: $J_{ij}(x) = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$ (3)
 Ende der Aussage des math. Satzes
 "(2f x 2f)-dim. Matrix" \rightarrow $\int dx = \int dy \frac{\partial x}{\partial y}$

Hier: (23.1) ist durch (22.3) gegeben, also: $J_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i + \tau \dot{x}_i(x)) = \delta_{ij} + \tau \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j}$ (4)

$$J = \begin{bmatrix} (1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1}) & \tau \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} & \dots & \tau \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_n} \\ \tau \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & (1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}) & \dots & \tau \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_1} & \dots & \dots & (1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_n}) \end{bmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}_{3 \times 3} = \begin{matrix} a(ei-hf) \\ -b(di-gf) \\ c(dh-eg) \end{matrix}$ $\det J = \prod_{i=1}^n (1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i}) + O(\tau^2)$ (1) H24

$$= 1 + \tau \sum_{i=1}^{n=2f} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + O(\tau^2)$$
 (2)

$(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + (a+b+c) + ab+bc+ac+abc$

$\left. \begin{matrix} x_i = q_i \\ x_{f+i} = p_i \end{matrix} \right\} \forall i=1, \dots, f$

$$= 1 + \tau \left[\sum_{j=1}^f \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^f \frac{\partial}{\partial p_j} \dot{p}_j \right] + O(\tau^2)$$
 (3)

nutze nun (H9):

$$= 1 + \tau \sum_{j=1}^f \left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_j} \right] + O(\tau^2)$$
 (4)

(4) eingesetzt in (2.5) $= 0$ (5)

$$\text{Vol } \Omega_{t+\tau} = \int_{\Omega'} dx'_1 \dots dx'_{2f} = \int_{\Omega} dx_1 \dots dx_n + O(\tau^2) = \text{Vol } \Omega_t + O(\tau^2)$$

Hieraus folgt: $\frac{d}{dt} \text{Vol } \Omega = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [\text{Vol } \Omega_{t+\tau} - \text{Vol } \Omega_t] = 0$ (6)