

a) In der Regel wird ein Gebiet im Phasenraum im Laufe der Zeit stark deformiert.

Beispiel: Ebenes mathematisches Pendel

Lagrange: $L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m g l [\cos \varphi - 1]$

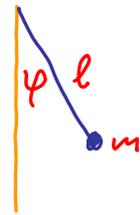
Kanonischer Impuls: $p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \dot{\varphi}$

Hamilton: $H = \frac{p_{\varphi}^2}{2 m l^2} - m g l [\cos \varphi - 1]$

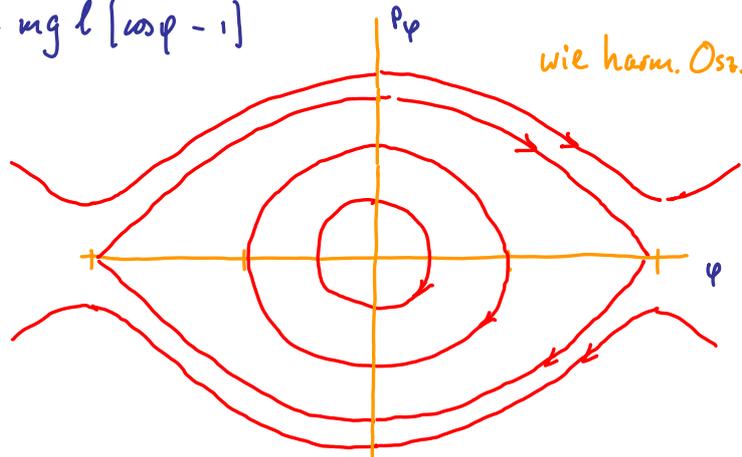
Ham. Bew.Gl.:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} =$$

$$\dot{p}_{\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} =$$



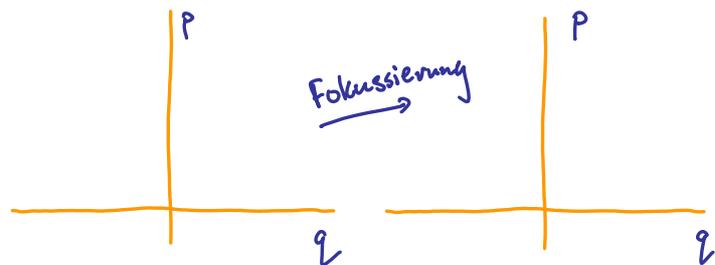
wie harm. Osz.



b) Geladenes Teilchen in äußerem Magnetfeld ist ein kanonisches System.

H26

Anwendung: Fokussierung eines Teilchenstrahls im Beschleuniger
 - Um bessere Ortsfokussierung des Teilchenstrahls zu erreichen, ist, laut Liouvilleschem Satz, eine breitere Impulsverteilung nötig!



Allgemein gilt:

Die Dynamik im 2f-dimensionalen Phasenraum ist eingeschränkt durch folgende Eigenschaften:

- Trajektorien kreuzen sich nicht
- Erhaltungsgrößen (schränken Dynamik auf bestimmte Mannigfaltigkeiten ein mit
- Liouvillescher Satz gilt.

Kanonische Transformationen

H27

Erinnerung: Hamiltonsches Extremalprinzip: Die Wirkung ist bei vorgegebenen Randbedingungen stationär für die physikalischen Trajektorien:

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \quad (1)$$

Dieses Extremalprinzip gilt auch bei Variationen im Phasenraum, der ja größer ist als der Koordinatenraum!

Satz ("modifiziertes Hamiltonsches Prinzip"): $S[q, p] = \int dt \left[\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) \right] \quad (2)$

$\delta S[] = 0$, mit $\left\{ \begin{array}{l} \delta(t_1) = \delta(t_2) = 0 \quad (3a) \\ \delta(q_i) = \delta(q_f) = 0 \quad (3b) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{Hamiltonschen Bewegungsgleichungen} \quad (3)$

Beweis:
Euler-Lagrange-Gl.
angewandt auf

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial G}{\partial q_k} \Rightarrow \quad (4a)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{p}_k} = \frac{\partial G}{\partial p_k} \Rightarrow \quad (4b)$$

Bemerkung: Da $G(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t)$ de facto NICHT von δq abhängt, ist Bedingung (27.3b) nicht für Herleitung des Satzes erforderlich.

H28

(27.3b) wäre nötig für part. Integr. bei: $\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial G}{\partial p} \delta p = - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{p}} \right) \delta p + \frac{\partial G}{\partial p} \delta p \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (1)$

Also ist Bedingung (27.3a) ausreichend, und gilt das modifizierte Hamiltonsche Prinzip unter genau denselben Voraussetzungen wie das ursprüngliche Hamiltonsche Prinzip für $L(q, \dot{q}, t)$.
Dennoch schränken wir vortan Betrachtung ein auf Bedingung, dass (27.3a) und (27.3b) gelten. (Grund: siehe unten).

Betrachte nun Transformationen von alten zu neuen Variablen,

$$\left. \begin{array}{l} q^1, \dots, q^f \\ p^1, \dots, p^f \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} Q_k \\ P_k \end{array} \quad (2)$$

Ziel: neuen Bewegungsgleichungen sollen einfacher als alten sein!

Definition: Variablentransformation d. Form (2) heisst "kanonisch", wenn sie d. Form der kanonischen Bewegungsgleichungen erhält, d.h., wenn ein $\mathcal{H}(Q, P, t)$ existiert, für das gilt:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \rightarrow \quad (3)$$

Bemerkung: (28.2) erlaubt Mischung v. Koordinaten und Impulsen, d.h. Klasse v. Transf. ist größer als i.d. Lagrangeschen Formulierung, wo nur Transf. im Koordinatenraum vorgesehen sind: H 29

$$Q_k =$$

Allgemeine Konstruktion einer kanonischen Transformation:
 Da Hamilton-Gleichungen äquivalent zum modifizierten Ham. Variationsprinzip sind, muss gelten:

p,q kanonisch: $\Leftrightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t) \right] \stackrel{(27.3)}{=} 0$, mit $\delta q^{(1)} = \delta q^{(2)} = 0$
 $\delta p^{(1)} = \delta p^{(2)} = 0$ (3)

P,Q kanonisch: (4)

(3) und (4) sind gleichzeitig erfüllt, falls beliebige Funktion mit stetigen 2.ten Ableitungen

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t) = \sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q_k, P_k, t) \quad (5)$$

denn Zusatzterm liefert: $\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(q + \delta q, p + \delta p, Q + \delta Q, P + \delta P) =$ (6)

Bemerkung: Da nur zwei der vier Variablensätze q, p, Q, P unabhängig sind, gibt es vier verschiedene Klassen von "Erzeugenden" F. (Je nach Problemstellung ist eine nützlicher als die anderen.) H 30

$$F = F_1(q, Q, t) \quad (1)$$

$$F = F_2(q, P, t) - \sum_k Q_k P_k \quad (2)$$

$$F = F_3(p, Q, t) + \sum_k q_k p_k \quad (3)$$

$$F = F_4(p, P, t) + \sum_k q_k p_k - \sum_k Q_k P_k \quad (4)$$

Betrachte zunächst F1.
 Die Form von F1 bestimmt Form der Transformation, wie folgt:

$$\frac{d}{dt} F_1(q, Q, t) \quad (5)$$

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) \stackrel{(27.5)}{=} \sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q, P, t) +$$

(5) ist identisch erfüllt, falls:

$$p_k = \quad (7) \quad \left. \begin{array}{l} (7) \\ (8) \end{array} \right\} \text{ (7), (8) auflösen nach:} \quad (9a)$$

$$P_k = \quad (8) \quad (9b)$$

$$\tilde{H} = \quad (9) \quad (10)$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator

Hamilton-Funktion:

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

H31

(1)

Ansatz für F1: Wähle

$$F_1(q, Q, t) =$$

(2)

(30.7):

$$P = \frac{\partial F_1}{\partial q}$$

(3)

(30.9):

$$P = \frac{\partial F_1}{\partial Q}$$

(4)

(3), (4) auflösen, nach
 $q=q(Q, P, t)$, $p=p(Q, P, t)$:

$$q(Q, P) \stackrel{(4)}{=}$$

(5)

(5) in (3):

$$p(Q, P) =$$

(6)

(5), (6) in (1)

$$\tilde{H}(Q, P, t) = \frac{1}{2m} (\quad)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (\quad)^2 \quad (7)$$

$$\tilde{H}(Q, P, t) =$$

(8)

Kanonische Gl.:

$$\dot{P} = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}$$

H32

(1)

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}$$

(2)

Eingesetzt in q, p:

$$q(t) \stackrel{(31.5)}{=}$$

(3)

$$p(t) \stackrel{(31.6)}{=}$$

(4)

korrekte,
bekannte

Bemerkungen:

Konstruktion einer zyklischen Variable erfordert Mischung von Ort- und Impulsvariablen.

Lohn der Mühen: neue Hamilton-Funktion ist extrem einfach!