

a) In der Regel wird ein Gebiet im Phasenraum im Laufe der Zeit stark deformiert.

Beispiel: Ebenes mathematisches Pendel

Lagrange: $L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m g l [\cos \varphi - 1]$

Kanonischer Impuls: $p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \dot{\varphi}$

Hamilton: $H = \frac{p_{\varphi}^2}{2 m l^2} - m g l [\cos \varphi - 1]$

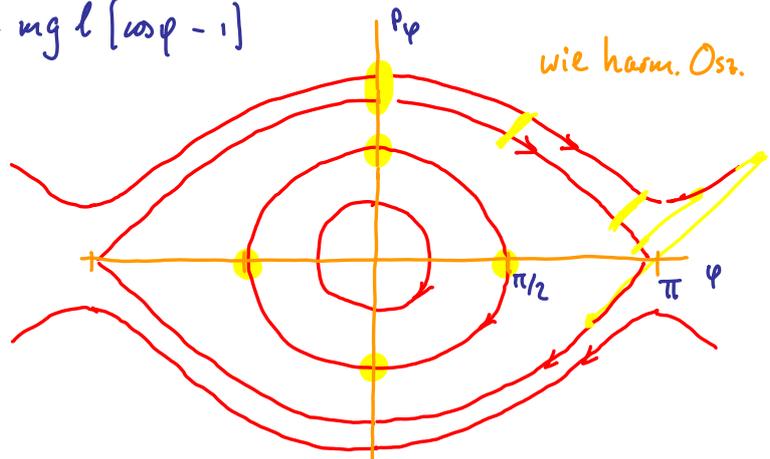
Ham. Bew.Gl:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} = \frac{p_{\varphi}}{m l^2}$$

$$\dot{p}_{\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -m g l \sin \varphi$$

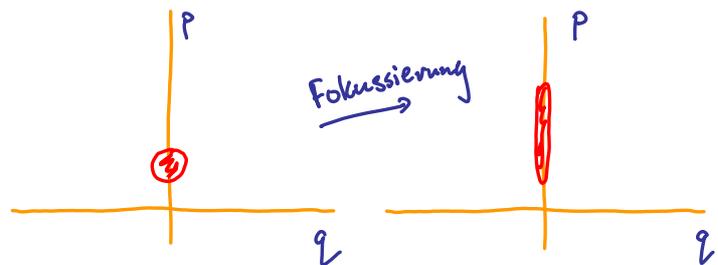


wie harm. Osz.



b) Geladenes Teilchen in äußerem Magnetfeld ist ein kanonisches System.

Anwendung: Fokussierung eines Teilchenstrahls im Beschleuniger
- Um bessere Ortsfokussierung des Teilchenstrahls zu erreichen, ist, laut Liouvilleschem Satz, eine breitere Impulsverteilung nötig!



Allgemein gilt:

Die Dynamik im 2f-dimensionalen Phasenraum ist eingeschränkt durch folgende Eigenschaften:

- Trajektorien kreuzen sich nicht
- Erhaltungsgrößen (schränken Dynamik auf bestimmte Mannigfaltigkeiten ein mit

$$I = I(q, p) = \text{const.}$$

- Liouvillescher Satz gilt.

Kanonische Transformationen

$$\bar{q} = q + \varepsilon \eta(t) \Rightarrow \dot{\bar{q}} = \dot{q} + \varepsilon \dot{\eta}(t) \quad \text{H27}$$

Erinnerung: Hamiltonsches Extremalprinzip: Die Wirkung ist bei vorgegebenen Randbedingungen stationär für die physikalischen Trajektorien:

$$\delta S[q] = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \Leftrightarrow (Lqz) \quad \text{für } \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (1)$$

Dieses Extremalprinzip gilt auch bei Variationen im Phasenraum, der ja größer ist als der Koordinatenraum!

Satz ("modifiziertes Hamiltonsches Prinzip"):

$$S[q, p] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) \right] dt \quad (2)$$

$g(x, \dot{x}) = G(q, p, \dot{q}, \dot{p})$

$$\delta S[q, p] = 0, \text{ mit } \left\{ \begin{array}{l} \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (3a) \\ \delta p(t_1) = \delta p(t_2) = 0 \quad (3b) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{Hamiltonschen Bewegungsgleichungen} \quad (3)$$

Beweis:
Euler-Lagrange-Gl.
angewandt auf

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial g}{\partial q_k} \xrightarrow{(2)} \frac{d}{dt} p_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (4a) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial \dot{p}_k} = \frac{\partial g}{\partial p_k} \Rightarrow 0 = \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (4b) \end{array} \right\} = (Hg) \checkmark$$

Bemerkung: Da $G(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t)$ de facto NICHT von \dot{p} abhängt, ist Bedingung (27.3b) nicht für Herleitung des Satzes erforderlich. H28

(27.3b) wäre nötig für part. Integr. bei:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{p}} \right) \delta \dot{p} = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial g}{\partial p} \right) \delta p + \left. \frac{\partial g}{\partial p} \delta p \right|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (1)$$

↑ ist aber durch (27.2) erfüllt

Also ist Bedingung (27.3a) ausreichend, und gilt das modifizierte Hamiltonsche Prinzip unter genau denselben Voraussetzungen wie das ursprüngliche Hamiltonsche Prinzip für $L(q, \dot{q}, t)$.
Dennoch schränken wir vortan Betrachtung ein auf Bedingung, dass (27.3a) und (27.3b) gelten. (Grund: siehe unten).

Betrachte nun Transformationen von alten zu neuen Variablen,

$$\left. \begin{array}{l} q^1, \dots, q^f \\ p^1, \dots, p^f \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} Q_k = Q_k(q^1, \dots, q^f, p^1, \dots, p^f, t) \\ P_k = P_k(q^1, \dots, q^f, p^1, \dots, p^f, t) \end{array} \quad (2)$$

Ziel: neuen Bewegungsgleichungen sollen einfacher als alten sein!

Definition: Variablentransformation d. Form (2) heisst "kanonisch", wenn sie d. Form der kanonischen Bewegungsgleichungen erhält, d.h., wenn ein $\tilde{H}(Q, P, t)$ existiert, für das gilt:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} \rightarrow \dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \quad (3)$$

Bemerkung: (28.2) erlaubt Mischung v. Koordinaten und Impulsen, d.h. Klasse v. Transf. ist H 29 größer als i.d. Lagrangeschen Formulierung, wo nur Transf. im Koordinatenraum vorgesehen sind:

$$Q_k = Q_k(q_1, \dots, q_f, t)$$

Allgemeine Konstruktion einer kanonischen Transformation:

Da Hamilton-Gleichungen äquivalent zum modifizierten Ham. Variationsprinzip sind, muss gelten:

p, q kanonisch: $\Leftrightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) \right] \stackrel{(27.3)}{=} 0$, mit $\delta q^{(1)} = \delta q^{(2)} = 0$
 $\delta p^{(1)} = \delta p^{(2)} = 0$ (3)

P, Q kanonisch: $\Leftrightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q, P, t) \right] = 0$, mit $\delta Q^{(1)} = \delta Q^{(2)} = 0$
 $\delta P^{(1)} = \delta P^{(2)} = 0$ (4)

(3) und (4) sind gleichzeitig erfüllt, falls

beliebige Funktion mit stetigen 2.ten Ableitungen

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t) = \sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q_k, P_k, t) + \frac{d}{dt} F(q, p, Q, P, t) \quad (5)$$

denn Zusatzterm liefert: $i\omega(\epsilon)$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(q + \delta q, p + \delta p, Q + \delta Q, P + \delta P) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (6)$$

Bemerkung: Da nur zwei der vier Variablensätze q, p, Q, P unabhängig sind, gibt es vier verschiedene Klassen von "Erzeugenden" F. (Je nach Problemstellung ist eine nützlicher als die anderen.)

H 30

$$F = F_1(q, Q, t) \quad (1)$$

$$F = F_2(q, P, t) - \sum_k Q_k P_k \quad (2)$$

$$F = F_3(p, Q, t) + \sum_k q_k p_k \quad (3)$$

$$F = F_4(p, P, t) + \sum_k q_k p_k - \sum_k Q_k P_k \quad (4)$$

nächstes Mal

Betrachte zunächst F1.

Die Form von F1 bestimmt Form der Transformation, wie folgt:

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) \stackrel{(29.5)}{=} \sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q, P, t) + \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t) + \sum_k \left[\frac{\partial F_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \right] + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (5)$$

(5) ist identisch erfüllt, falls:

$$p_k(q, Q, t) \stackrel{(7)}{=} \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_k} \quad (7)$$

$$P_k(q, Q, t) \stackrel{(8)}{=} - \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_k} \quad (8)$$

(7), (8) auflösen nach: $q = q(Q, P, t)$ (9a)
 $p = p(Q, P, t)$ (9b)

$$\tilde{H}(Q, P, t) \stackrel{(9)}{=} \left[H(q, p, t) + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t} \right]_{q = q(Q, P, t), p = p(Q, P, t)} \quad (10)$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator

Hamilton-Funktion:

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

H31

(1)

Ansatz für F1: Wähle

$$F_1(q, Q, t) = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \cot Q$$

(2)

(30.7):

$$P = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m \omega q \cot Q$$

(3)

(30.9):

$$P = \frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{\frac{1}{2} m \omega q^2}{\sin^2 Q}$$

(4)

(3), (4) auflösen, nach $q=q(Q, P, t)$, $p=p(Q, P, t)$:

$$q(Q, P) \stackrel{(4)}{=} \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

(5)

(5) in (3):

$$p(Q, P) = \sqrt{m\omega} \sqrt{\frac{2P}{m\omega} \sin Q} \frac{\cos Q}{\sin Q} = \sqrt{2m\omega P} \cos Q$$

(6)

(5), (6) in (1)

$$\tilde{H}(Q, P, t) = \frac{1}{2m} (\sqrt{2m\omega P} \cos Q)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \right)^2$$

(7)

$$\tilde{H}(Q, P, t) = \omega P \Rightarrow Q \text{ ist zyklisch! } \textcircled{\text{U}}$$

(8)

Kanonische Gl.:

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{const.} = c$$

H32

(1)

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q(t) = \omega t + \alpha$$

(2)

Eingesetzt in q, p :

$$q(t) \stackrel{(31.5)}{=} \sqrt{\frac{2c}{m\omega}} \sin(\omega t + \alpha)$$

(3)

$$p(t) \stackrel{(31.6)}{=} \sqrt{2m\omega c} \cos(\omega t + \alpha)$$

(4)

} korrekte, bekannte

WOW!

Bemerkungen:

Konstruktion einer zyklischen Variable erfordert Mischung von Ort- und Impulsvariablen.

Lohn der Mühen: neue Hamilton-Funktion ist extrem einfach!