

Definition: Variablentransformation d. Form (2) heisst "kanonisch", wenn sie d. Form der kanonischen Bewegungsgleichungen erhält, d.h., wenn ein $\tilde{H}(Q,P,t)$ existiert, für das gilt:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \rightarrow \dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \quad (1)$$

Allgemeines Konstruktionsprinzip einer kanonischen Transformation: wähle "erzeugende F" und konstruiere neue Hamilton-Funktion gemäß:

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t) = \sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q_k, P_k, t) + \frac{d}{dt} F(q, p, Q, P, t) \quad (2)$$

Bemerkung: Da nur zwei der vier Variablen q, p, Q, P unabhängig sind, gibt es vier verschiedene Klassen von "Erzeugenden" F. (Je nach Problemstellung ist eine nützlicher als die anderen.)

$$F = F_1(q, Q, t) \quad (3)$$

$$F = F_2(q, P, t) - \sum_k Q_k P_k \quad (4)$$

$$F = F_3(p, Q, t) + \sum_k q_k P_k \quad (5)$$

$$F = F_4(p, P, t) + \sum_k q_k P_k - \sum_k Q_k P_k \quad (6)$$

Beispiel: F1

$$F_1 = F_1(q, Q, t):$$

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q, p, t) \stackrel{(3.2)}{=} \sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q, P, t) + \underbrace{\frac{d}{dt} F_1(q, Q, t)}_{\substack{\sum_k \left[\frac{\partial F_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \right] + \frac{\partial F}{\partial t}}} \quad (1)$$

(1) ist identisch erfüllt, falls:

$$p_k(q, Q, t) \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_k} \quad (2)$$

$$P_k(q, Q, t) \stackrel{(2)}{=} -\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_k} \quad (3)$$

$$(2), (3) \text{ auflösen nach: } \begin{cases} q = q(Q, P, t) & (4a) \\ p = p(Q, P, t) & (4b) \end{cases}$$

$$\tilde{H}(Q, P, t) \stackrel{(3)}{=} \left[H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q, Q, t) \right]_{\substack{q = q(Q, P, t) \\ p = p(Q, P, t)}} \quad (5)$$

Grundidee hinter dieser Konstruktion:

Wenn F1 von q, Q, t abhängt, brauchen wir Gleichungen, für p und P [siehe (2) und (3)].

Diese bekommen wir, durch Vergleich der Koeffizienten von $\dot{q}$ und $\dot{Q}$ in (3).

Analog für andere Tr.-Klassen:
(33.2), mit Einsteinscher
Summenkonvention:

$$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{dF}{dt} = \tilde{H}(Q, P, t) - H(q, p, t) \quad (1a) \quad (1b)$$

gilt für alle Klassen von F

Erzeugende F	(1a) = 0	Gleichungen benötigt für	Koeff.-Vergleich
F =	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k$	$=$ (2a), $=$ (2b)	
F = F ₂ (q, P, t)	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k$	$p_k =$ (3a), $Q_k =$ (3b)	
F = F ₃ (p, Q, t)	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{\partial F_3}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial F_3}{\partial Q_k} \dot{Q}_k$	$q_k =$ (4a), $P_k =$ (4b)	$\dot{p}_k, \dot{Q}_k$
F = F ₄ (p, P, t) $+ q_k p_k - Q_k P_k$	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{\partial F_4}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial F_4}{\partial P_k} \dot{P}_k$ $+ \dot{q}_k p_k + q_k \dot{p}_k - \dot{Q}_k P_k - Q_k \dot{P}_k$	$q_k = -\frac{\partial F_4}{\partial P_k}$ (5a), $Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial p_k}$ (5b)	$\dot{p}_k, \dot{P}_k$

Bemerkung: Die Definitionen F2, F3 und F4 können als Legendre-Transformationen von F1 aufgefasst werden, und umgekehrt.

H36

Beispiel in Klasse F2:
Betrachte erzeugende
der Form:

$$F_2(q, P, t) = \quad (1)$$

(35.3a)

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = \quad (2)$$

(35.3b)

$$Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = \quad (3)$$

(3) umfasst alle bekannte Koordinatentransformationen der Lagrangeschen Mechanik (sogenannte Punkttransformationen)

Spezielle Wahl von f:

$$f_j =$$

$$F_2(q, P, t) = \quad (1)$$

(4)

$$p_k = \quad (2)$$

$$Q_k = \quad (3)$$

(5)

Satz: Eine gegebene Transformation

H37

$$Q = Q(q, p, t) \quad , \quad P = P(q, p, t) \quad (1)$$

ist genau dann kanonisch, wenn folgende Poisson-Klammer-Relationen erfüllt sind,

$$\{Q_i, P_j\} = \quad (2)$$

$$\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = \quad (3)$$

wobei die Poisson-Klammern bezüglich q, p zu berechnen sind:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} \quad (4)$$

Beweis: Übungsaufgabe

Bemerkung: dieser Satz hat wichtige Anwendungen in der Quantenmechanik, wegen

$$\{ \quad , \quad \} \rightarrow \frac{i}{\hbar} [\quad , \quad]$$

Hamilton-Jacobi-Theorie

H38

Bewegungsgleichungen werden einfacher, wenn die neuen Koordinaten zyklisch sind. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn eine zeitabhängige kanonische Transformation existiert,

$$\{q, p, H(q, p, t)\} \quad (1)$$

so dass die neue Hamilton-Funktion verschwindet:

Falls $\tilde{H}(Q, P, t) = 0$, folgt $\dot{Q}_k \stackrel{(HJ)}{=} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}$, $\dot{P}_k \stackrel{(HJ)}{=} -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k}$ (2)

$$Q_k(q, p, t) = \quad , \quad P_k(q, p, t) = \quad (3)$$

Invertieren von (3)
liefert gesuchte Lösung
der Bewegungsgl.:

$$q_k = q_k(Q, P, t) \quad , \quad P_k = P_k(Q, P, t) \quad (4)$$

α_k, β_k spielen die Rolle von Integrationskonstanten, lassen sich durch Angabe v. Anfangsbedingungen bestimmen:

$$\beta_k \stackrel{(2)}{=} Q(q, p, t) \quad , \quad \alpha_k \stackrel{(2)}{=} P(q, p, t) \quad (5)$$

Satz: (1) Die Lösung der kanonischen Bewegungsgl. ist äquivalent dazu, eine allgemeine Lösung H39

$\tilde{S} =$ der partiellen Differentialgleichung (DGL) ("Hamilton-Jacobi-Gleichung")

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0 \quad (0)$$

zu finden, mit f unabhängigen "Integrationskonstanten"

(alle zeitunabhängig)

(2) Insbesondere gilt dann:

$$P_k = \quad , \quad Q_k = \quad (2)$$

und durch Auflösen nach q folgt:

$$q_k = \quad (3)$$

Beweis (1): Eine solche Lösung sei gegeben; betrachte sie als Erzeugende vom Typ F2:

$$F_2(q, P, t) \quad (4)$$

Die neue Hamilton-Funktion ist dann

$$\tilde{H}(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \quad (5)$$

Beweis (2): folgt trivial, analog zu (38.3-5), mit

$$Q_k \stackrel{(35.3b)}{=} \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = \quad (6)$$

Bemerkung: Da in der Hamilton-Jacobi-Theorie [Gl. (39.1,2)] nur Ableitungen der Erzeugenden vorkommen, ist sie nur bis auf eine Additive Konstante bestimmt. Per Konvention wird diese so gewählt, dass

H40

$$\tilde{S}(q_0, \alpha, t_0) = \quad (6)$$

Satz: Wenn die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, vereinfacht die Wahl

(eine der α_k sei)

$$\tilde{S}(q, \alpha, t) = \quad (1)$$

für die Erzeugende die Hamilton-Jacobi-Gl. zu

"verkürzte Wirkung"

"verkürzte Hamilton-Jacobi-Gl."

$$H(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_f}) = E \quad (2)$$

Beweis:

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \stackrel{(39.1)}{=} 0 \quad (3)$$

zeitunabhängig

Bemerkung: Der Ansatz (1) funktioniert nur, weil H NICHT explizit zeitabhängig ist.

Wäre bräuchten wir eine Zeitabhängigkeit in

(4)

Beispiel: Harmonischer Oszillator

H41

Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (1)$$

Erzeugende:

$$\tilde{S}(q, \alpha = E, t) \stackrel{(40.1)}{=} \quad (2)$$

Verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung (40.2) für

$$W = W(q, E)$$

$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) \stackrel{(40.2)}{=} E :$$

$$\frac{1}{2m} \left[\quad \right]^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \stackrel{(1)}{=} E \quad (3)$$

Diff.Gl. für $W(q, E)$

$$\frac{\partial}{\partial q} W(q, E) \stackrel{(3)}{=} \quad (4)$$

Integriert:

$$\int_{q_0}^q dq' \stackrel{(4)}{=} = \int_{q_0}^q dq' \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q'^2} \quad (5)$$

Explizite Lösung des Integrals nicht nötig, denn

$$p \stackrel{(35.3a)}{=} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q} =$$

H42
(1)

(35.3b) oder (39.2)

$$Q = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} \quad (2)$$

$$\stackrel{(41.5)}{=} \quad (3)$$

$$\stackrel{\text{Brounstein}}{=} -t + \frac{1}{\omega} \arcsin \left(\frac{m \omega q}{\sqrt{2mE}} \right) \quad (4)$$

Auflösen nach $q(t)$
und $p(t)$ liefert
bekannte Lösung:

$$q(t) = \quad (5)$$

$$p(t) \stackrel{(1.5)}{=} \sqrt{2mE} \sqrt{1 - \sin^2 \omega(t+\beta)} = \sqrt{2mE} \cos \omega(t+\beta) \quad (6)$$

Anfangsbedingungen bei
 $t=0$ legen α, β
fest:

$$E \stackrel{(41.1)}{=} \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_0^2 ; \quad \beta \stackrel{(5.6)}{=} \arctan \left[m \omega \frac{q_0}{p_0} \right] \quad (7) \quad \square$$

Physikalische Interpretation der Erzeugenden:

H43

Satz: Die Lösung $\tilde{S}(q, \alpha, t)$ der Hamilton-Jacobi-Gl. ist gerade die Wirkung entlang der physikalischen Trajektorie.

zeitunabhängig!

Beweis: Betrachte

$$\frac{d}{dt} \tilde{S}(q, \alpha, t) = \quad (1)$$

Hamilton-Jacobi-Gl:

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$= \quad (2)$$

(2) = Legendre-Transf. der Hamilton-Funktion:

$$= \quad (3)$$

(1) integriert:

$$\tilde{S}(q, \alpha, t) = \quad (4)$$

Folgerung: Das Wirkungsintegral läßt sich als Erzeugende für gerade die kanonische Transf. interpretieren, die die Hamilton-Funktion "trivial" macht.

Bemerkung: Um (4) zu verifizieren, muss Lösung der Bewegungsgleichung bereits bekannt sein.

Beispiel: (43.4) für Harmonischen Oszillator:

H44

$$\tilde{S}(q, E, t) \stackrel{(41.2)}{=} W(q, E) - E(t - t_0) \quad (1)$$

$$\stackrel{(41.5)}{=} \int_{q_0}^q dq' \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q'^2} + W(q_0, E) - E(t - t_0) \quad (2)$$

Transformation der Integrationsvariablen:

$$= \quad (3)$$

$$= \int_{t_0}^t dt' \quad \underline{2E [\cos^2[\omega(t+\beta)] - \frac{1}{2}]} \quad (4)$$

$$L = T - V = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (5)$$

Lagrange-Funktion:

$$\stackrel{(42.5, 6)}{=} \quad (6)$$

$$\cos^2 - \sin^2 = 2(\cos^2 - \frac{1}{2})$$

$$= \underline{2E \{ \cos^2[\omega(t+\beta)] - \frac{1}{2} \}}$$

= Integrand v. (4),
konsistent mit (43.4) (7)